



Universidad  
Carlos III de Madrid  
[www.uc3m.es](http://www.uc3m.es)

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

**Título: Problemas de control óptimo asociados a la extracción de un recurso no renovable.**

**Autor: María Martín Cano.**

**Titulación: Grado de Ingeniería eléctrica.**

**Profesor: María Barbero Liñán.**

**Fecha: 24 de Septiembre de 2014.**



# **Índice de contenido**

<b><u>1 Introducción</u></b>	<b>1</b>
<b><u>2 Panorama eléctrico de España</u></b>	<b>3</b>
<b><u>2.1 Energías de Régimen Especial</u></b>	<b>7</b>
<b><u>2.2 Energías de Régimen Ordinario</u></b>	<b>10</b>
2.2.1 Central de ciclo combinado	10
2.2.2 Central de carbón, central nuclear y gran hidráulica	12
<b><u>3 Gas Natural</u></b>	<b>15</b>
<b><u>3.1 Historia del gas natural</u></b>	<b>15</b>
<b><u>3.2 Composición química</u></b>	<b>16</b>
3.2.1 Gas Natural no convencional	18
<b><u>3.3 Cadena de suministro del gas natural</u></b>	<b>20</b>
3.3.1 Exploración y reservas de GN	21
3.3.2 Extracción del GN	23
3.3.3 Tratamiento, transporte y almacenamiento	25
<b><u>3.4 Aplicaciones y consumo</u></b>	<b>27</b>
<b><u>4 Herramientas matemáticas para analizar el uso de recursos limitados</u></b>	<b>29</b>
<b><u>4.1 Harold Hotelling</u></b>	<b>29</b>
4.1.1 Regla de Hotelling	31
<b><u>4.2 Lev Semionovich Pontryagin</u></b>	<b>34</b>
<b><u>4.3 Principio del máximo de Pontryagin:</u></b>	<b>35</b>
<b><u>5 Aplicación del PMP a la extracción del Gas Natural</u></b>	<b>40</b>
<b><u>5.1 Datos experimentales</u></b>	<b>40</b>
5.1.1 Reservas mundiales de gas natural	40
5.1.2 Precio del gas natural	44
5.1.3 Coste de extracción de gas natural	46
5.1.4 Demanda del gas natural	50
<b><u>5.2 Modelizado de los datos experimentales</u></b>	<b>52</b>
<b><u>5.3 Resolución del caso teórico</u></b>	<b>59</b>

<b><u>5.4 Resolución del caso experimental.</u></b>	63
<b><u>6 Conclusiones</u></b>	68
<b><u>7 Bibliografía</u></b>	71
<b><u>ANEXO MATLAB</u></b>	75
<b><u>Curve fitting tool</u></b>	75
<b><u>Función Ode 45</u></b>	75
<b><u>Función bvp4c</u></b>	79

## Índice de figuras

Figura 2.1: Producción de energía eléctrica. Fuente:REE.....	4
Figura 2.2: Evolución de la producción bruta de Régimen Ordinario y Especial. Fuente: REE.....	5
Figura 2.3: Evolución de la potencia instalada. Fuente:REE.....	6
Figura 2.4: Curva monótona de carga en 2012. Fuente: REE .....	7
Figura 2.5: Planta de energía termosolar de Sanlúcar la Mayor.....	9
Figura 2.6: Producción de energía de Régimen Especial (GWH/año). Fuente: CNE.....	9
Figura 2.7: Central de ciclo combinado. Fuente: Unesa.....	11
Figura 2.8: Evolución de la potencia peninsular instalada de centrales de ciclo combinado de turbina de gas. Fuente: CNE.....	12
Figura 2.9: Corte de una central hidroeléctrica de bombeo. Fuente: Foronuclear.....	14
Figura 3.1: Sección de un yacimiento de GN. Fuente: Gas Natural.....	16
Figura 3.2: Unidades de volumen de GN. Fuente:Energía Ivace.....	17
Figura 3.3: Unidades de calor del GN. Fuente: REE.....	18
Figura 3.4: Cadena de suministro del GN. Fuente: E-medida.....	20
Figura 3.5: Evolución de las reservas por regiones. Fuente: Cedigaz.....	22
Figura 3.6: Abastecimiento de GN por países. 2013 Fuente: CNMC.....	23
Figura 3.7: Torre de perforación de pozos en tierra y en mar. Fuente: Gas Natural.....	24
Figura 3.8: Fractura hidráulica. Fuente: Diario de León.....	25
Figura 3.9: Buque metanero. Fuente: Calderas y gas natural.....	27
Figura 3.10: Evolución de la demanda de GN en España. Fuente:CNE.....	27
Figura 3.11: Evolución del consumo de GN en España. Fuente:Gas Natural .....	28
Figura 4.1: Imagen de Harold Hotelling.....	29
Figura 4.2: Regla de Hotelling. Fuente: Dto de economía, Uc3m.....	32
Figura 4.3: La competencia perfecta y la regla de Hotelling. Fuente: Informe sobre el comercio mundial 2010.....	32
Figura 4.4: Lev Semionovich Pontryagin.....	34
Figura 5.1: Evolución de la previsión. Fuente: CNMC.....	51
Figura 5.2: Reservas en función del tiempo.....	53
Figura 5.3: Precio [Millón €/TWh ]en función del año.....	54
Figura 5.4 Demanda en función del tiempo.....	55
Figura 5.5:Coste y precio en función de z.....	58

Figura 5.6: Demanda en función de $z$ .....	58
Figura 5.7 Cantidad extraída en función de los años, sin interés.....	61
Figura 5.8 Cantidad extraída en función de los años, con interés.....	62
Figura 5.9 Cantidad extraída en función de los años, sin interés.....	62
Figura 5.10 Cantidad extraída en función de los años, sin interés.....	63
Figura 5.11: $z$ en función de los años.....	67
Figura 5.12: $z$ en función de los años.....	67
Figura 1: Figura correspondiente al ejemplo 1.....	78

## Índice de tablas

Tabla 5.1: Ejemplo de conversión de unidades .....	42
Tabla 5.2: Reservas mundiales probadas de gas natural. Fuente:EIA.....	42
Tabla 5.3: Reservas mundiales de gas natural. Fuente: Sedigas.....	43
Tabla 5.4: Reservas mundiales de gas natural.....	43
Tabla 5.5: Precio de GN en Europa. Fuente: Worldbank.....	45
Tabla 5.6: Precio (USD) de importaciones de gas natural(MBTU )2009. Fuente: IEA.....	45
Tabla 5.7: Precio de gas natural en Europa. ....	46
Tabla 5.8: Costes de exploración de gas natural en USD/Barril. Fuente:EIA .....	48
Tabla 5.9: Costes de extracción USD/Barril Fuente: EIA.....	49
Tabla 5.10: Suma de costes de exploración y extracción.....	50
Tabla 5.11: Evolución de la Demanda de GN nacional. Fuente: CNE.....	51
Tabla 5.12: Evolución histórica del consumo de GN es España. Fuente: Gas Natural.....	51
Tabla 5.13: Evolución de la demanda de GN es España.....	52
Tabla 5.14: Datos experimentales y evaluados en el polinomio.....	56
Tabla 5.15: Datos del año 44 al 55.....	57

## **1 Introducción**

Cualquier bien manufacturado es el resultado del trabajo humano sobre un conjunto de recursos provenientes en última instancia de la naturaleza. De este modo la actividad económica se puede entender como una forma de gestión de la naturaleza. [25]

Los recursos naturales se clasifican en recursos renovables o no renovables atendiendo a si son agotables o no. Los recursos no renovables son aquellos cuyas reservas, inevitablemente, se acabarán en algún momento ya que no resulta posible regenerarlos. Algunos ejemplos son los combustibles fósiles, como el petróleo, gas natural y el carbón. Es muy importante hacer una gestión y uso responsable de los recursos no renovables, estableciendo el ritmo de extracción adecuado para optimizar su aprovechamiento. La gestión de recursos naturales es el área de la economía que trata todos estos aspectos.

El gas natural es un recurso limitado que en las últimas décadas ha visto incrementado su consumo a nivel mundial. En este proyecto se tratará el gas natural desde diferentes puntos de vista con el objetivo de constituir una panorámica global y estimar el ritmo de extracción óptimo para maximizar el beneficio.

Primero se hará una descripción del sistema eléctrico español, en el que el gas natural tiene un gran protagonismo. Una gran parte de la energía producida en España procede de las centrales de ciclo combinado que se valen de la combustión del gas natural para producir energía.

En la siguiente sección se comenzará viendo el gas natural desde un punto de vista histórico. A continuación se analizará su composición química. Finalmente se hará un recorrido por la cadena de suministro del gas natural desde la extracción del gas hasta su comercialización.



La parte central de la memoria consiste en analizar dos herramientas matemáticas para analizar recursos limitados. La primera trata de la teoría de Hotelling en la que se analiza cuando es mejor explotar un recurso, si ahora o en el futuro con la esperanza de que aumente el precio. La otra teoría es el Principio del Máximo de Pontryagin. En este principio se trata de calcular el ritmo de extracción óptimo en cada momento para obtener el máximo beneficio.

La parte experimental de este informe está basada en el principio del Máximo de Pontryagin. Para ello se han recogido datos experimentales de las reservas, el precio y el coste del gas natural. Estos datos se han modelizado con matlab en forma polinómica. A los polinomios resultantes se les ha aplicado el Principio del Máximo de Pontryagin, obteniendo así un sistema de ecuaciones diferenciales que finalmente se resuelve con matlab y nos da la cantidad de extracción óptima buscada.

La última sección está dedicada a las conclusiones. En este proyecto cobran un valor muy importante, puesto que una cosa es la teoría y otra la práctica, ya que muchos factores que afectan a la extracción del ritmo del gas natural. Además, aunque el gas natural es un recurso limitado, el hecho de que cada año aparezcan más reservas hace que sea muy complejo su estudio con herramientas matemáticas enfocadas en recursos limitados, en la sección de las conclusiones se comentarán todos estos aspectos.

## 2 Panorama eléctrico de España

La estructura del sistema eléctrico se compone de cinco actividades diferentes: la generación, el transporte, la distribución, la coordinación y la comercialización. A continuación se explicarán estas actividades en el marco del sistema eléctrico español.

La generación se refiere a la actividad con la que se produce energía eléctrica en los generadores. Estos generadores están en sitios muy alejados de los lugares de demanda, por lo que es necesario transportar la electricidad hasta los puntos de consumo. El camino que sigue la electricidad hasta llegar al cliente final tiene dos etapas: el transporte y la distribución. El transporte es la transmisión de energía desde los centros de producción hasta la red de transporte. Esta red se diseña para utilizar altas tensiones, hasta 400 kilovoltios (KV). Al aumentar la tensión, mientras se transmite una misma potencia, la intensidad será menor por lo que se consigue reducir las pérdidas. Del transporte se encarga Red Eléctrica Española. La distribución, se refiere al transporte de la electricidad desde la red de transporte hasta los usuarios. La coordinación trata de regular la oferta de compra y venta de electricidad. El Operador del Mercado Ibérico de Energía se ocupa de esta tarea en España y Portugal. También se debe tener en cuenta la comercialización que comprende la venta de energía a los usuarios. Algunas de las comercializadoras más conocidas son: Endesa, Iberdrola y Gas Natural. [1],[2]

El transporte, la distribución y la coordinación son monopolios naturales. Tanto la generación como la comercialización son actividades liberadas y por tanto abiertas a la competencia.

La generación de energía eléctrica es una de las actividades más importantes del Sistema Eléctrico Nacional. Según como los propietarios de las centrales vendan su energía podemos distinguir entre energía de Régimen Especial y Ordinario. La mayoría de las centrales de Régimen Especial coinciden con las renovables pero no tiene por qué ser así.

Con Energía de Régimen Especial nos referimos a la procedente del tratamiento de residuos, biomasa, cogeneneración, eólica, solar e hidráulica, siempre que las instalaciones no superen los 50 megawattios (MW). Estas energías dependen de un recurso natural, por lo que las centrales no pueden prever cuanta energía podrán vender para un determinado día. Luego estas energías están en desventaja a la hora de competir en el mercado libre. Para compensar esta desventaja el gobierno las incentiva con subvenciones, consiguiendo de este modo fomentar sus beneficios medioambientales y disminuir el precio de la electricidad a largo plazo. El propietario de la central puede vender la energía a un precio único fijado para todos los periodos o al precio fijado en el mercado eléctrico.[3]

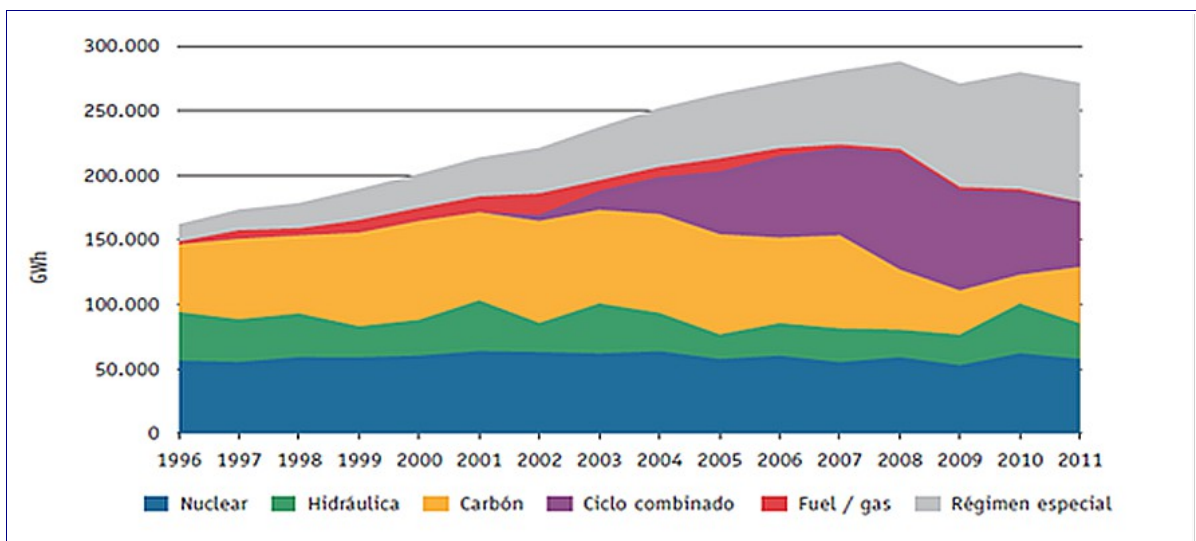


Figura 2.1: Producción de energía eléctrica. Fuente:REE

La figura 2.1 detalla la producción de energía eléctrica desde 1996.

La energía de Régimen Ordinario hace referencia a las centrales nucleares, de carbón, de fuel, de gas y gran hidráulica. Estas centrales venden su energía a las comercializadoras en el mercado eléctrico.

En la figura 2.2 podemos apreciar como la producción de Régimen Especial se incrementa mientras que la producción de Régimen Ordinario disminuye a lo largo de

los años.

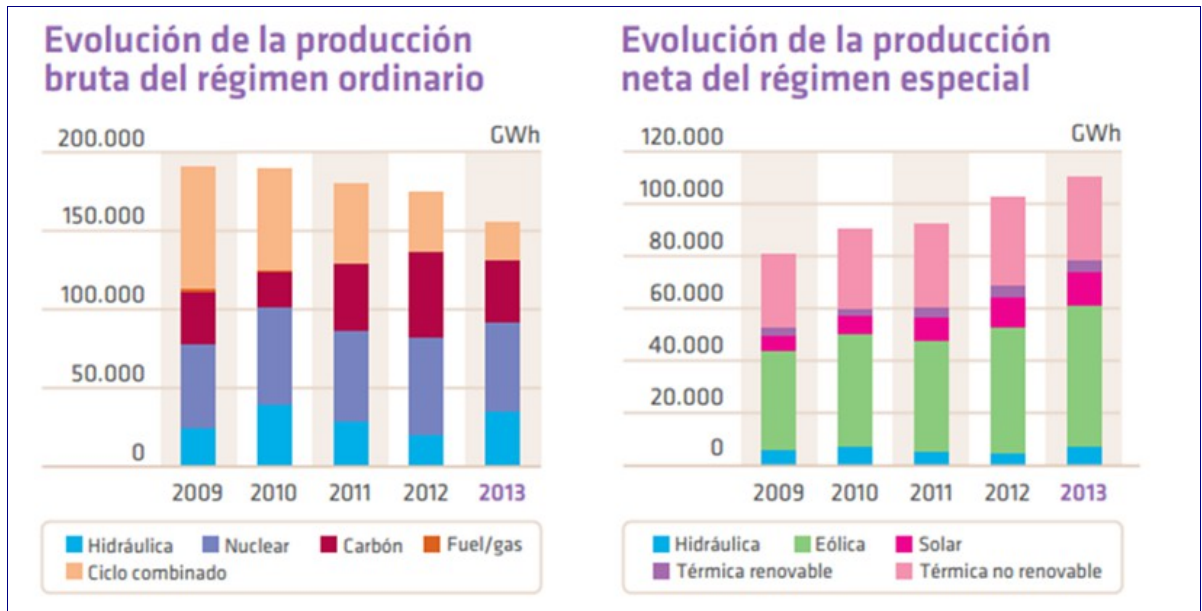


Figura 2.2: Evolución de la producción bruta de Régimen Ordinario y Especial. Fuente: REE

La potencia instalada es la cantidad total de potencia de generación conectada a la red del Sistema Eléctrico que nos informa de los medios de generación de los que dispone el sector eléctrico. Durante el año 2011 se produjo un incremento del 1,8% de toda la potencia instalada frente al año anterior. La figura 2.3 muestra la evolución de la potencia instalada en 2012 y cabe destacar que la energía nuclear se ha mantenido constante desde antes de 1990. Las centrales de gas comenzaron a estar disponibles en 2002 y junto con las hidráulicas, son las que reemplazan las energías eólica y solar cuando no hay viento ni sol.

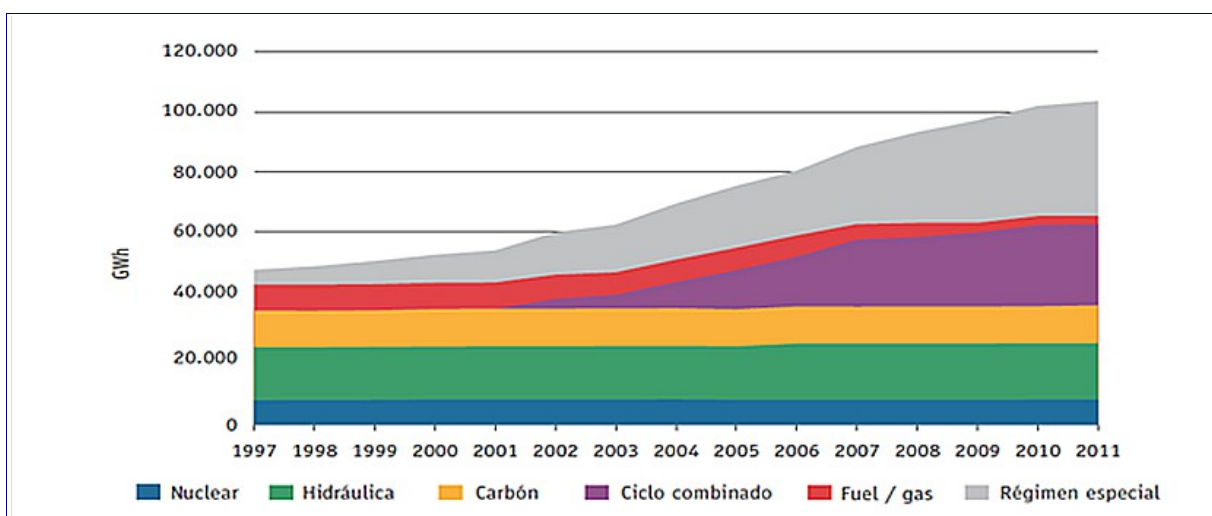


Figura 2.3: Evolución de la potencia instalada. Fuente:REE

Nunca podremos saber con certeza la demanda futura de electricidad. Como la energía eléctrica no se puede guardar es muy complicado garantizar la cobertura de la demanda, especialmente cuando hablamos de energías renovables de las que no podemos determinar su producción. A pesar de no conocer la demanda siempre podemos estimar una demanda mínima que estará presente, a esta demanda se le llama demanda base. La diferencia, entre la demanda total y la demanda base se conoce como demanda de punta y tiene un carácter variable. Hay centrales cuyos costes fijos son más baratos que el coste que supone aumentar o disminuir su producción es por eso que se usan para cubrir la base de la demanda, se trata de las centrales nucleares, algunas de las centrales de carbón y ciclos combinados. Para cubrir los picos de la demanda usamos tecnologías de punta, es decir, tecnologías con costes variables bajos. Como ejemplo de esta explicación se muestra la curva monótona de carga del 2012 del sistema peninsular, figura 2.4. La curva monótona de carga es de tipo acumulativo y representa para cada tecnología la energía que ha estado produciendo por encima de la potencia, indicada en el eje Y. [4]

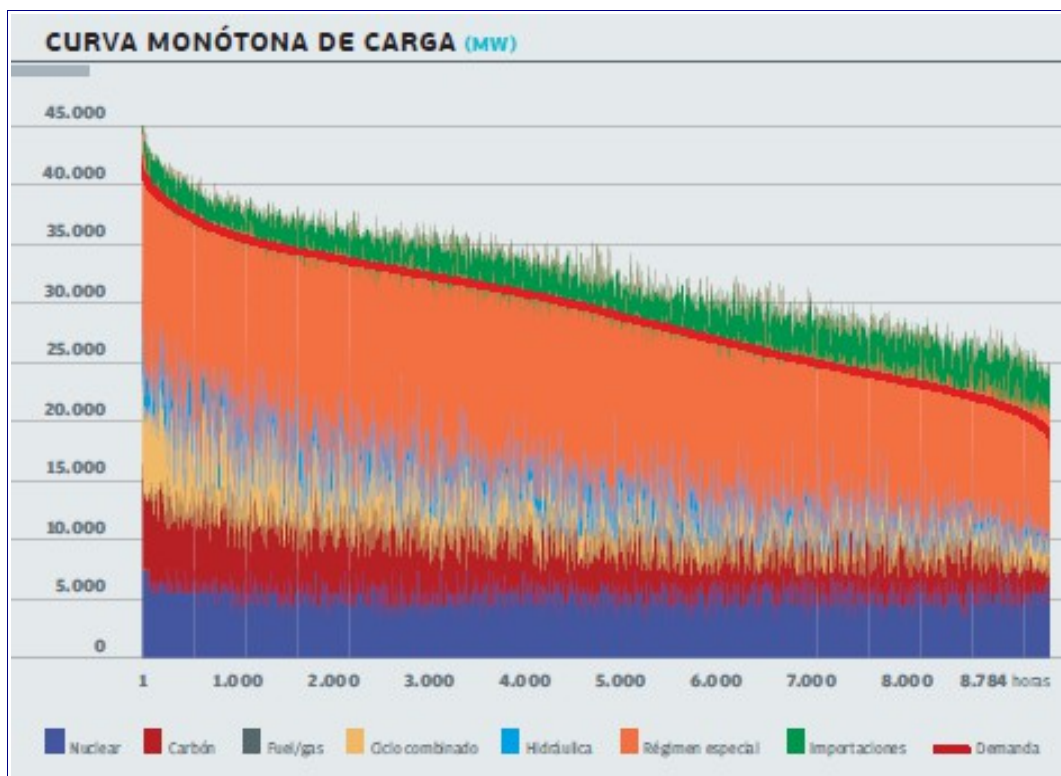


Figura 2.4: Curva monótona de carga en 2012. Fuente: REE

Mención aparte merecen los sistemas extrapeninsulares: Islas Baleares, Canarias, Ceuta y Melilla. En ellos predomina la generación con fuel y gas (46,6%), seguida por la generación con ciclo combinado (27,8%).

## 2.1 Energías de Régimen Especial

A continuación expongo las principales energías de Régimen Especial en España. Estas energías, como se ha explicado antes, son las que reciben una subvención del Gobierno. Responden a la generación eólica, la cogeneración, la energía solar y la pequeña hidráulica.

La energía eólica es la generada por el efecto de las masas de aire que se desplazan desde zonas de alta presión a baja presión. El viento hace mover la turbina eólica que a su vez mueve al aerogenerador y finalmente produce la energía eléctrica. Los aerogeneradores se agrupan en parques eólicos. En la figura 2.6 queda reflejado que la

energía eólica es la principal productora de energía de Régimen Especial. España es el cuarto país del mundo en producción de energía eólica. En los últimos cinco años ha crecido dicha producción un 5%.

La cogeneración es el procedimiento mediante el cual se obtiene simultáneamente energía eléctrica y energía térmica útil. A pesar de no ser renovable, tiene el tratamiento de Régimen Especial. Una de sus ventajas es su gran eficiencia. Es una buena opción para industrias que además de electricidad consuman calor o frío. En 2013 se redujeron un 20% las ayudas a estas energías por lo que muchas empresas que tenían planes de inversión en la cogeneración están dando marcha atrás.

La siguiente energía es la solar, podemos distinguir entre energía fotovoltaica y energía termosolar. Para obtener energía fotovoltaica usamos células solares fotovoltaicas que convierten la luz del Sol en electricidad. Los paneles fotovoltaicos son conjuntos de estas células. En la figura 2.4 se observa el aumento entre 2008 y 2009 en la producción de esta energía. La instalación aumentó en 2007 de manera desmesurada debido a una mala gestión de los incentivos que se le otorgan en ese momento. El gobierno pretendía que se instalaran 40 MW, para conseguirlo entregó subvenciones muy cuantiosas a los propietarios de estas energías, tanto es así que en Septiembre de 2008 había instalados 3,2 GW en España. La consecuencia fue una gran sobreproducción y el encarecimiento de los paneles.

La figura 2.6 muestra la importancia de la energía eólica y solar. El problema de estas energías renovables es que al ser dependientes del clima no son suficientes para asegurar el suministro de electricidad y es necesario tener otra fuente de energía alternativa. [5]





Figura 2.5: Planta de energía termosolar de Sanlúcar la Mayor

En conclusión, estas energías solo pueden ser un complemento a las necesidades de cobertura eléctrica de nuestro mercado.

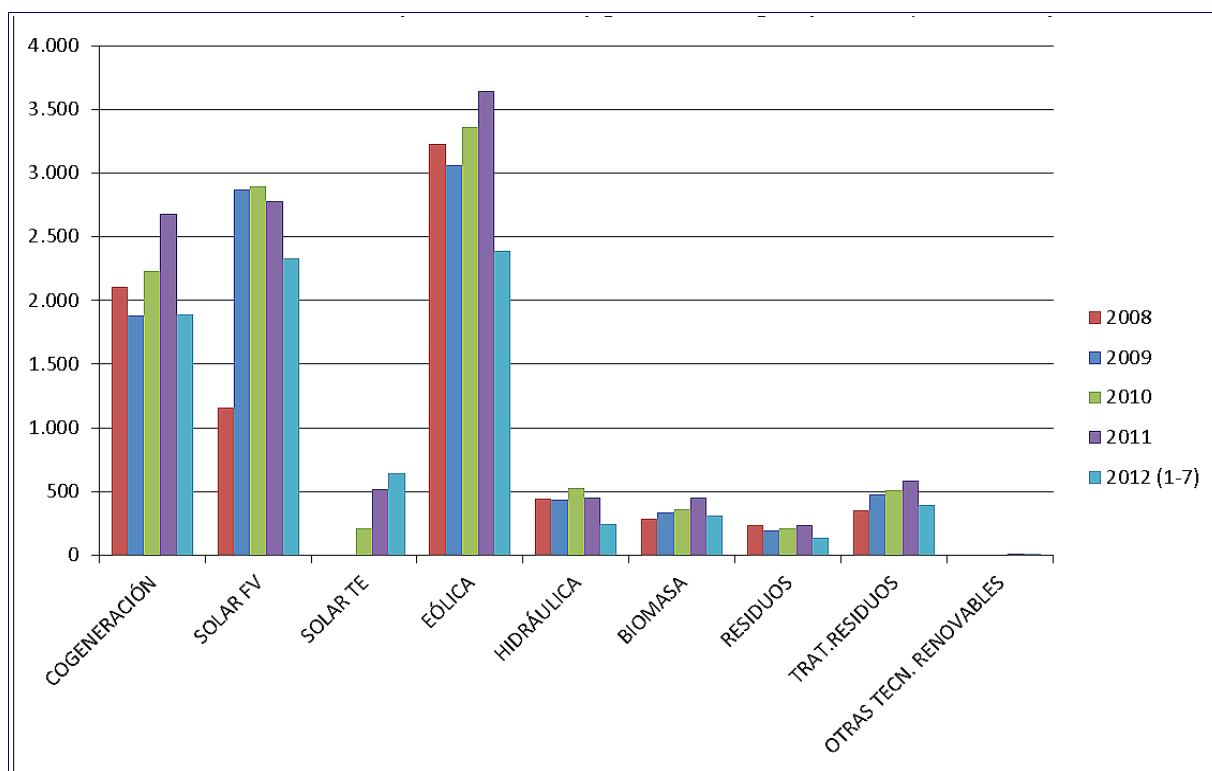


Figura 2.6: Producción de energía de Régimen Especial (GWH/año). Fuente: CNE



## **2.2 Energías de Régimen Ordinario**

Como se ha visto en el apartado anterior, la estabilidad del sistema eléctrico se apoya fundamentalmente en las energías de funcionamiento de base, que coinciden con las Energías de Régimen Ordinario.

Los cuatro tipos de centrales que encontramos bajo esta denominación son: centrales de ciclo combinado, carbón, nuclear y gran hidráulica. A continuación haré una descripción de todas ellas y de los recursos energéticos que emplean.

### **2.2.1 Central de ciclo combinado**

Un ciclo combinado es la combinación de un ciclo de gas y un ciclo de vapor. El ciclo de gas lo compone la turbina de gas y el fluido de trabajo es el gas natural. Consta de un compresor que absorbe aire a temperatura ambiente. Ese aire comprimido pasa a la cámara de combustión donde se mezcla con la combustión del gas natural. La cámara trabaja a unas condiciones de presión y temperatura determinadas que permiten optimizar el proceso. Los gases salen de la cámara a una temperatura superior a los 1000°C y una presión muy elevada. Estos gases se reconducen a la turbina para producir trabajo.

Los gases que salen de la turbina de gas, gases de escape, aun están suficientemente calientes, su temperatura oscila en torno a los 500°C. Este calor se capta a través de la caldera de recuperación para producir vapor de agua.

El vapor de agua se expande en la turbina de vapor. Esta turbina al igual que la turbina de gas está acoplada a un generador para producir trabajo. Por último, este vapor se condensa cerrando el ciclo. [4]

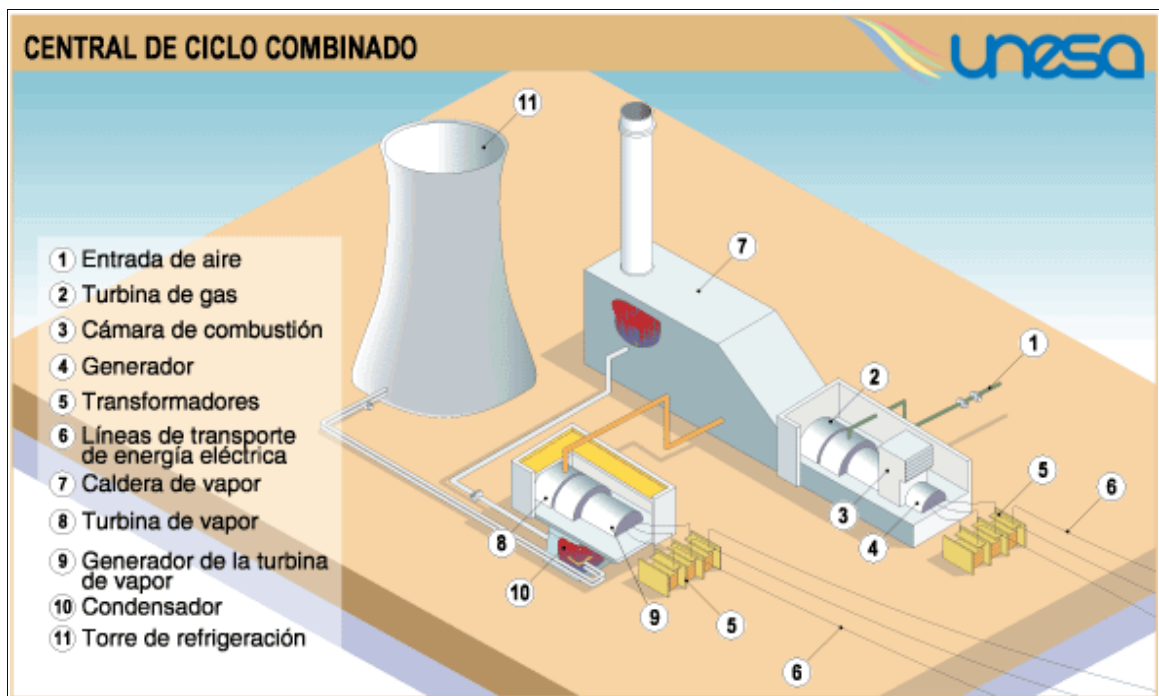
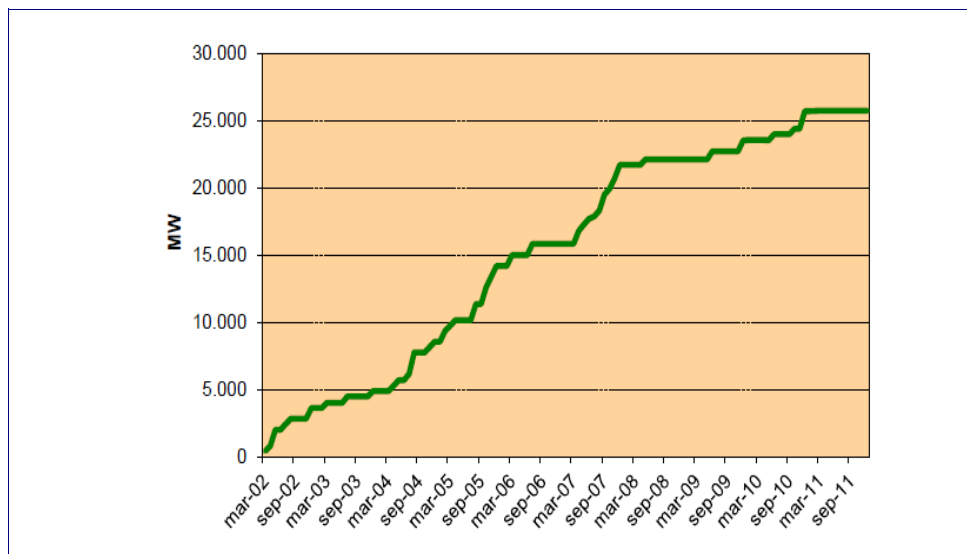


Figura 2.7: Central de ciclo combinado. Fuente: Unesa

Las centrales de ciclo combinado alcanzan rendimientos en torno al 60% y para la condensación del vapor requiere mucha menos agua que la necesaria en las centrales convencionales. Otra de sus ventajas es la poca contaminación que producen puesto que el gas natural es un combustible mucho más limpio que el carbón. Además, a diferencia de otros combustibles, resulta mucho más barata.

La potencia instalada de ciclos combinados en la península desde el 2002 ha sido cada vez mayor. En la figura 2.6 se ve su crecimiento hasta 2007. A partir del 2007 se produce un estancamiento debido al crecimiento en ese año de las energías de Régimen Especial.

La producción bruta de estas centrales en el año 2011 asciende a 50734 GWh, un 22% menos que en el 2010, siendo este el tercer año consecutivo que desciende su producción. La producción bruta de ciclos combinados pasa de un 34 % en 2010 a un 28% en 2011. [6]



*Figura 2.8: Evolución de la potencia peninsular instalada de centrales de ciclo combinado de turbina de gas. Fuente: CNE*

Es probable que para 2013-2016 la producción con centrales combinadas se reduzca levemente. Por ahora no hay ninguna puesta en marcha de instalaciones de ciclos combinados.

El gas natural es el recurso que utilizan estas centrales y se explica en la sección 3 con más detalles.

### 2.2.2 Central de carbón, central nuclear y gran hidráulica

Como muestra la figura 2.1, a parte de centrales de ciclo combinado, entre las energías de Régimen Ordinario en España, también podemos encontrar centrales de carbón, centrales nucleares y gran hidráulica. A continuación se explicarán los aspectos más importantes de estas centrales.

En una central térmica de carbón se consigue electricidad a partir de la quema del carbón. El carbón se introduce en la caldera pulverizado, para aumentar su superficie de combustión. La caldera está formada por muchos tubos por donde circula el agua que será convertida a vapor de agua. Este vapor de agua originado en la caldera mueve la turbina de vapor. El rendimiento está entre el 35-45%.

El uso de carbón está limitado por las medidas de protección del medio ambiente a nivel europeo y mundial cada vez más restrictivas. Las emisiones de CO<sub>2</sub> derivadas de

la combustión del carbón son un 70% superiores a las del gas natural. A pesar de este inconveniente el carbón cuenta con muchas subvenciones por parte del gobierno, ya que sin ellas la energía eléctrica con carbón no sería rentable debido a su alto coste.

El funcionamiento de las centrales nucleares es parecido al de las centrales de carbón. La diferencia es que en las nucleares el vapor de agua se consigue debido a la fisión nuclear. La fisión se refiere a la desfragmentación de los núcleos en otros más pequeños, cuando esto ocurre con núcleos de uranio se libera energía. Estas centrales cuentan con un reactor donde se inicia y controla la fisión de los núcleos.

El rendimiento energético está en torno a 80-95%. Este tipo de centrales no emiten a la atmósfera gases contaminantes, pero sí generan residuos radioactivos que tardan muchos años en desintegrarse y pueden llegar a ser muy peligrosos en caso de accidente.

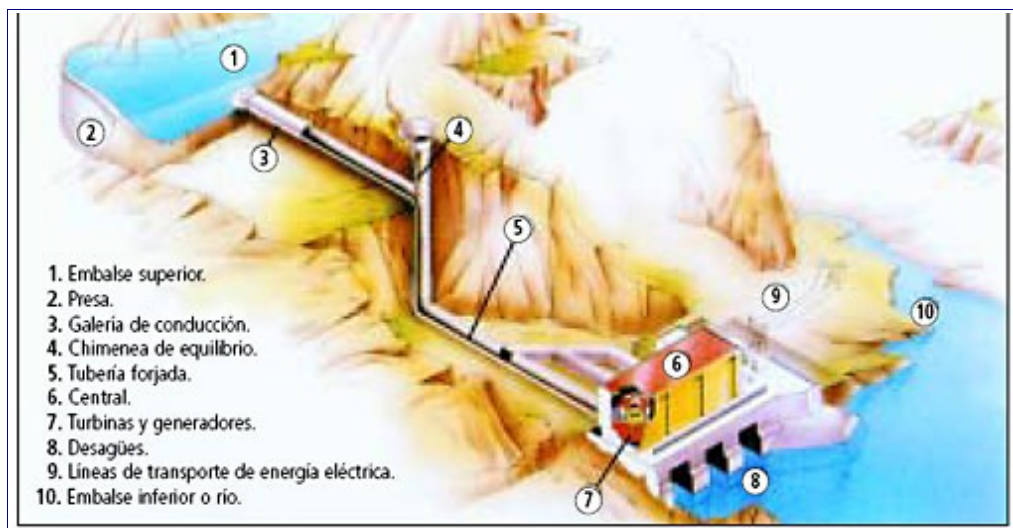
En 1983 se crea una ley que rechaza cualquier construcción relacionada con la energía nuclear. Desde entonces la energía nuclear en España va descendiendo año tras año. Por lo que hay que empezar a plantear cual puede ser una buena tecnología de replazo.

Muchos defensores de la energía nuclear se apoyan en que es una energía muy barata. Esto podría ser cierto si no se tuvieran en cuenta los costes derivados del tratamiento de los residuos. Además, las centrales nucleares son las únicas que se les permite funcionar sin un seguro que cubra los accidentes ya que si lo tuvieran que contratar los costes aumentarían en un 300%. [7]

Las centrales de gran hidráulica son las que producen más de 50 MW. Su funcionamiento consiste en aprovechar el salto de agua de un embalse para producir electricidad. Algunas cuentan con un sistema de bombeo. Las centrales que cuentan con sistema de bombeo tienen dos embalses. El agua contenida en el embalse situado en el nivel más bajo se bombea durante las horas de menor demanda eléctrica al depósito situado en la cota más alta, con el fin de turbinarla para generar electricidad en

las horas de mayor consumo eléctrico.

Es una energía muy barata. Un gran inconveniente de las centrales hidráulicas es la destrucción de la naturaleza que acarrea con la construcción del embalse, así como los riesgos ocasionados en un posible hundimiento de este. Además en las centrales eléctricas que no cuentan con sistema de bombeo su producción de electricidad será dependiente de las precipitaciones. [8]



*Figura 2.9: Corte de una central hidroeléctrica de bombeo. Fuente: Foronuclear.*

## **3 Gas Natural**

El gas natural es una de las principales fuentes de energía a nivel mundial. Actualmente es la segunda fuente de energía de mayor utilización después del petróleo. Si el carbón fue el combustible fósil principal en el siglo XIX y el petróleo la principal en el siglo XX, el gas natural es considerado el combustible fósil del siglo XXI.

### **3.1 Historia del gas natural**

Los orígenes del gas natural se remontan a 6000 y 2000 A.C. en Oriente Medio. Los sacerdotes acercaban antorchas a fugas de gas natural dando lugar a lo que llamaban “fuegos eternos”. Para ellos estos fuegos únicamente tenían connotaciones religiosas. El primer pozo de gas natural que se conoce está en China y data del año 211 A.C.

En Europa no se conoció el gas natural hasta que fue descubierto en Gran Bretaña en 1659, pero no fue hasta 1790 cuando se empezó a comercializar.

En el siglo XIX el gas natural fue casi exclusivamente utilizado como fuente de luz. La falta de infraestructuras de transporte dificultaba el traslado del gas. También se comenzó a explotar el gas natural en pozos. El gas era distribuido a los consumidores a través de una cañería de plomo de diámetro pequeño, para cocinar e iluminación.

A finales del siglo XIX aparecieron los primeros gasoductos y sistemas de almacenamiento.

Durante muchos años, la industria mundial del gas natural estuvo fuertemente regulada, convirtiéndose en un monopolio de Estado. En el transcurso de los últimos 30 años, se ha producido un movimiento hacia una mayor liberalización de los mercados del gas natural. [9], [10]

### 3.2 Composición química

El gas natural recibe este nombre porque se extrae directamente de la naturaleza y llega a su punto de consumo sin haber experimentado prácticamente ninguna transformación química.

El gas natural, al que a partir de ahora también me referiré con las iniciales GN, proviene de la degradación de materia orgánica de procesos que tuvieron lugar entre 240 y 70 millones de años atrás. Esta materia orgánica se origina por la acumulación de organismos plactónicos que quedaron enterrados en el fondo marino por muchas capas de tierra. Debido a la falta de oxígeno a la que estaban sometidos su descomposición fue muy lenta. Los gases provocados por la descomposición ascendieron hasta llegar a capas de terreno impermeable en las que quedan atrapados originando los yacimientos. En muchos casos estos yacimientos están asociados a yacimientos de petróleo. El GN también puede producirse artificialmente mediante la fermentación bacteriana de materia orgánica. [11]



Figura 3.1: Sección de un yacimiento de GN. Fuente: Gas Natural

El GN está formado por una mezcla de hidrocarburos ligeros compuesto alrededor del 85% por metano. El metano es una molécula sencilla formada por un átomo de

carbono y 4 átomos de hidrógeno. El resto de los hidrocarburos que lo constituyen son: etano, propano, butano y pentano.

El gas natural es un compuesto incoloro, inodoro, no es ni corrosivo ni tóxico, su temperatura de combustión es elevada y posee un estrecho intervalo de inflamabilidad, lo que hace de él un combustible fósil seguro en comparación con otras fuentes de energía. Además, al ser menos denso que el aire no se acumula en zonas bajas, evitando intoxicaciones.

En la quema del GN, al igual que en el resto de los combustibles fósiles se produce CO<sub>2</sub> y vapor de agua. Por cada gigajulio (GJ) de energía que se produce de GN se emiten 55,9 kg de CO<sub>2</sub> a la atmósfera, comparando esta cifra con los 100 kg de CO<sub>2</sub> que emite el carbón, podemos decir que el GN es un combustible limpio.

La lluvia ácida tiene efectos perjudiciales para el medio ambiente, se produce por los óxidos de nitrógeno y el dióxido de azufre cuando son liberados a la atmósfera. El gas natural apenas contiene azufre y óxidos de nitrógeno por lo que no contribuye a la formación de lluvia ácida. [5]

Las cantidades de GN se expresan en volumen o unidades de calor. El uso de unas unidades u otras varía en función del país de donde procedan los datos. [13]

A continuación muestro dos tablas con equivalencia de unidades.

<b>Equivalente a:</b>	<b>1 m<sup>3</sup> de gas</b>	<b>1 pie<sup>3</sup> de gas</b>	<b>1 m<sup>3</sup> de GNL</b>	<b>1 tonelada de GNL</b>	<b>1 barril de petróleo</b>	<b>1 tonelada de petróleo</b>
<b>1 m<sup>3</sup> de gas</b>	1	35,5	0,00171	0,000725	0,0066	0,0009
<b>1 pie<sup>3</sup> de gas</b>	0,0283	1	0,00005	0,00002	0,00019	0,00003
<b>1 metro cúbico de GNL</b>	584	20.631	1	0,405	3,86	0,526
<b>1 Tonelada GNL</b>	1.379	48.954	2,36	1	9,53	1,3
<b>1 barril petróleo Arabian</b>	152	5.396	0,259	0,112	1	0,136
<b>1 tonelada petróleo Arabian</b>	1.111	39.441	1,89	0,769	7,33	1

Figura 3.2: Unidades de volumen de GN. Fuente: Energía Ivace

Otra unidad de medida de energía a parte de las de la figura 3.3 es el tep, tonelada equivalente de petróleo. Se ha establecido que un tep es 11630 kilovatios-hora. [12]



Energía, unidades de calor					
Unidades	th	kcal	B.T.U.	kW/h	kJ
Termia	1	1000	3968,32	1,163	4186,8
Kilocaloría	1000	1	3,96832	0,001163	4,1863
British Thermal Unit	252	0,25199	1	2,93071x10	1,05505
Kilovatio/hora	0,8601	859,84523	3412,1416	1	3600
Kilojulio	235,8459	0,23884	0,94782	kW/h	1

Figura 3.3: Unidades de calor del GN. Fuente: REE

A presión atmosférica normal, si el gas natural se enfría a una temperatura de 161°C bajo cero , se condensa bajo la forma de un líquido. El gas natural licuado (GNL) ocupa casi 600 veces menos espacio que el gas natural y es dos veces menos pesado que el agua, por lo que el transporte resulta mucho más fácil.

### 3.2.1 Gas Natural no convencional

Bajo el nombre gas natural no convencional designamos a un tipo de gas que a diferencia del gas natural, cuando se origina debido a la descomposición de los fósiles, no asciende. Esto dificulta su extracción porque no permite el movimiento del fluido. Podemos distinguir los siguientes tipos de GN no convencional:

- Tight-Gas: GN contenido en arenas compactas con baja porosidad y permeabilidad.
- Coal-bed Methane: GN contenido en capas de carbón.
- El gas de esquisto: También conocido como gas pizarra, en inglés shale gas. Se encuentra en la formaciones rocosas sedimentarias de grano muy fino. Este tipo de gas natural se extrae de zonas profundas en terrenos donde abunda el esquisto, las lutitas y las argilitas ricas en materia orgánica. El interior rocoso

del esquisto presenta baja permeabilidad, lo que impide su ascenso a la superficie. Por lo que para la extracción comercial de dicho gas, es necesario romper la roca, con una técnica llamada franking, detallada al final de la sección 3.3.2. [14],[15]

### 3.3 Cadena de suministro del gas natural

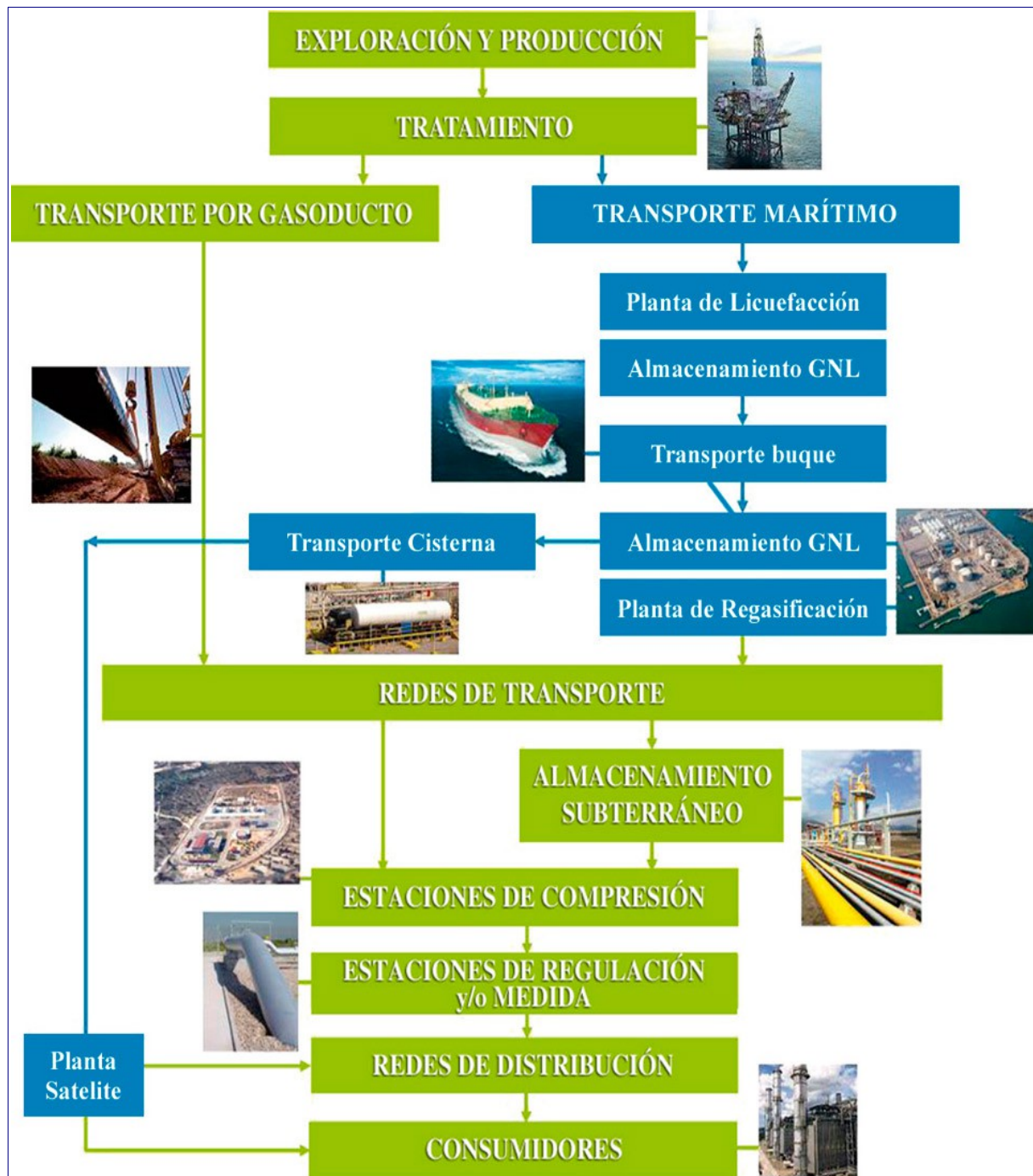


Figura 3.4: Cadena de suministro del GN. Fuente: E-medida

En este apartado se tratará el conjunto de actividades que son necesarias desde la

búsqueda del GN hasta su comercialización. Finalmente se comentará como se desarrolla cada actividad en España. En la figura 3.4 se detallan los principales procesos. El GN en fase gaseosa se representa en color verde, mientras que el GN en estado líquido aparece en color azul. [16]

### 3.3.1 Exploración y reservas de GN

La búsqueda de gas natural comienza con exploraciones, que consisten en perforar zonas donde existen indicios de la existencia de gas. El siguiente paso es analizarlo para conseguir información de la calidad y la cantidad del gas. Aunque no todos los yacimientos se analizan debido al alto coste que este proceso implica lo que sí se realiza constantemente son perforaciones para localizar yacimientos.

Se denominan reservas de gas natural a los yacimientos de gas que se encuentran en la naturaleza. Las reservas probadas son las que son susceptibles de ser explotadas con la tecnología disponible y económicamente viable. El número de reservas probadas de gas natural crece con la evolución de las tecnologías que hacen económicamente viables reservas existentes que no lo eran en el pasado y facilitan la exploración en busca de nuevas. Las reservas posibles son aquellas reservas cuya probabilidad de explotación es inferior al 50 %.

Las empresas productoras de gas natural están obligadas a mantener reservas probadas que cubran el abastecimiento de los contratos que tengan vigentes.

A nivel mundial los países que más reservas probadas poseen son Rusia, Irán y Catar. Rusia posee la mayor cantidad de reservas de gas natural del mundo, aproximadamente la cuarta parte de las reservas de gas probadas totales. En Irán, la mayor parte de sus reservas permanecen sin desarrollar debido a las sanciones internacionales que sufre el país y sus reservas se encuentran en alta mar.

Qatar representa alrededor del 13% de las reservas totales de gas natural del mundo, mientras se posiciona como el mayor país proveedor de GNL en el mundo.

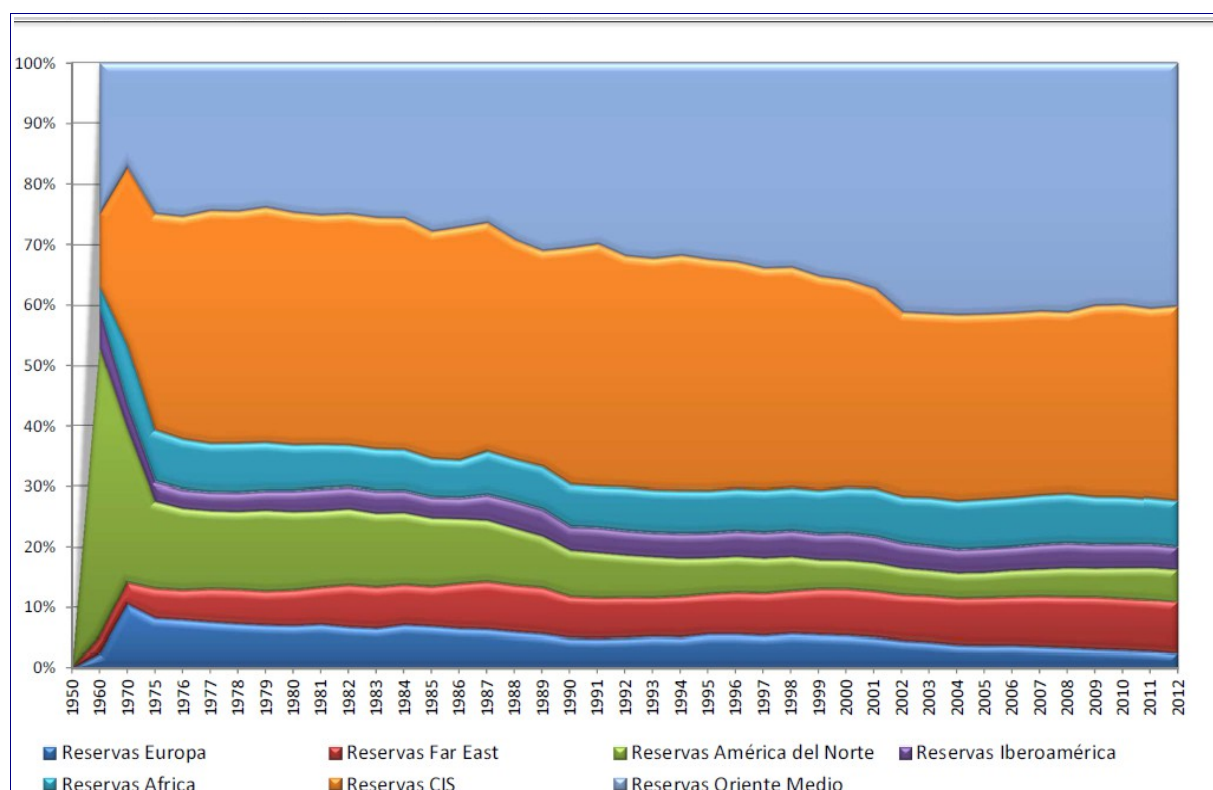


Figura 3.5: Evolución de las reservas por regiones. Fuente: Cedigaz

En Europa las reservas de gas natural se concentran al norte: Noruega, Países Bajos y Reino Unido son los principales países. España carece de yacimientos de gas natural, por lo que el 99% del abastecimiento de gas natural proviene de otros países. La figura 3.6 muestra el abastecimiento de gas natural en España por países. Argelia, seguido de Noruega, es el principal exportador de GN a España. [17]

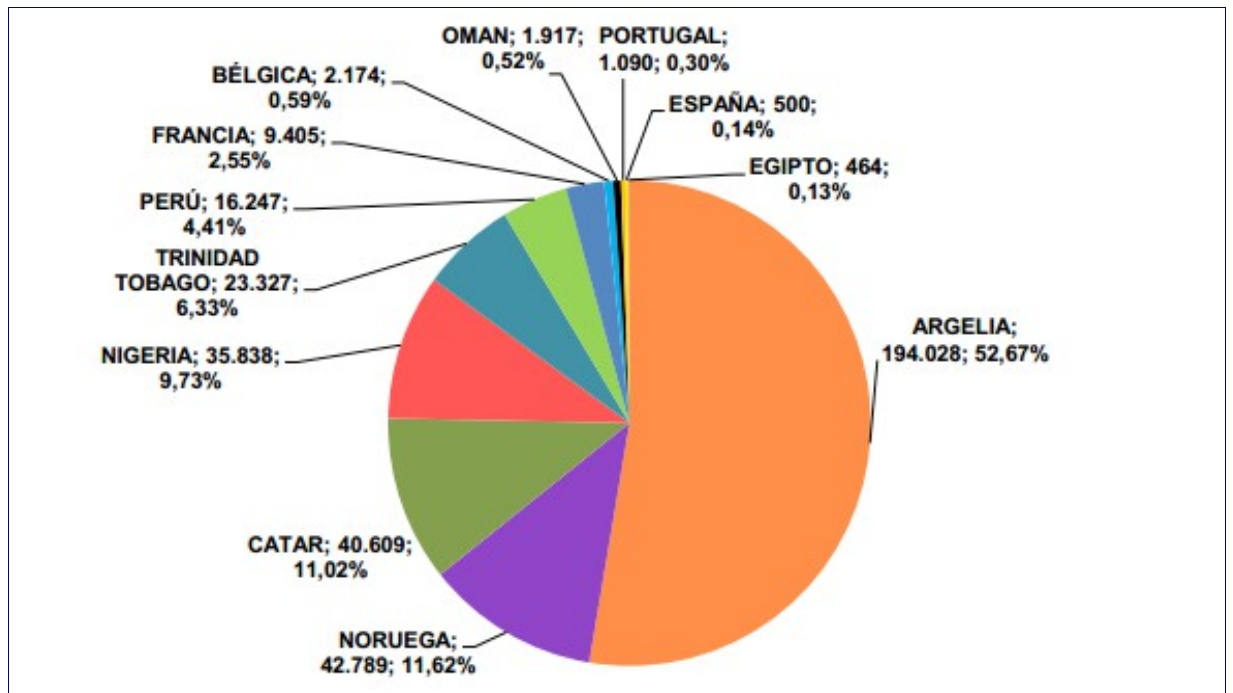


Figura 3.6: Abastecimiento de GN por países. 2013 Fuente: CNMC

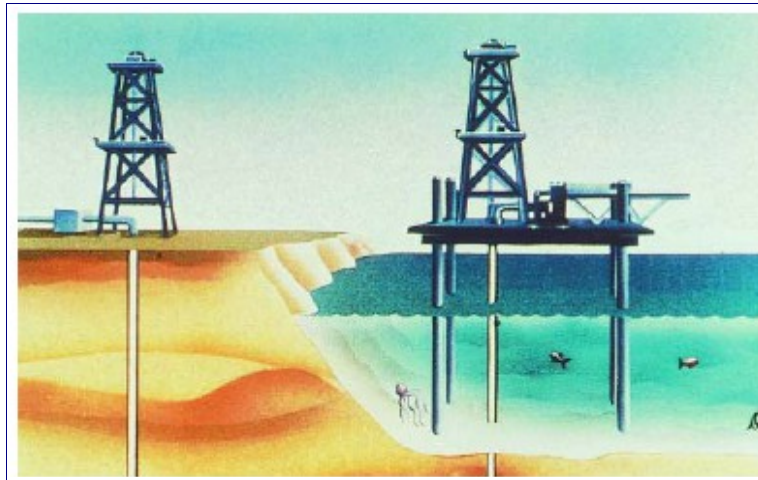
### 3.3.2 Extracción del GN

Cuando un posible yacimiento de gas ha sido detectado y se ha comprobado la viabilidad técnica, legal y económica de la extracción del gas, comienza la perforación de pozos. Existen dos técnicas principales de perforación del suelo:

**La rotación directa:** consiste en una pieza de metal rotatoria y afilada que va perforando la corteza terrestre. Es usada típicamente para pozos profundos que están a alta presión.

**Perforación con cable:** Deja caer una broca de metal muy pesada sobre el suelo de manera que cree un agujero. Se usa para yacimientos poco profundos y sometidos a poca presión.

Para la extracción de yacimientos en mar se usan las mismas técnicas que para yacimientos en tierra. La única diferencia es que se necesitan construir plataformas artificiales sobre el mar desde las que poder perforar. Esto hace que exista un coste añadido y dificultad a la hora de explotar este tipo de yacimientos.



*Figura 3.7: Torre de perforación de pozos en tierra y en mar.  
Fuente: Gas Natural*

Los últimos avances en técnicas de extracción se están produciendo en torno al gas no convencional. En concreto al gas pizarra comentado en la sección 3.2.3. La técnica que se emplea se llama fracking o fractura hidráulica, como se ve en la figura 3.8 es relativamente fácil de extraer, basta con introducir un fluido para aumentar la presión y así movilizar el gas. Este proceso conlleva una serie de impactos ambientales, algunos de los cuales aún no están plenamente caracterizados o comprendidos, entre ellos contaminación de las aguas subterráneas, contaminación atmosférica, emisión de gases de efecto invernadero y terremotos. [18]



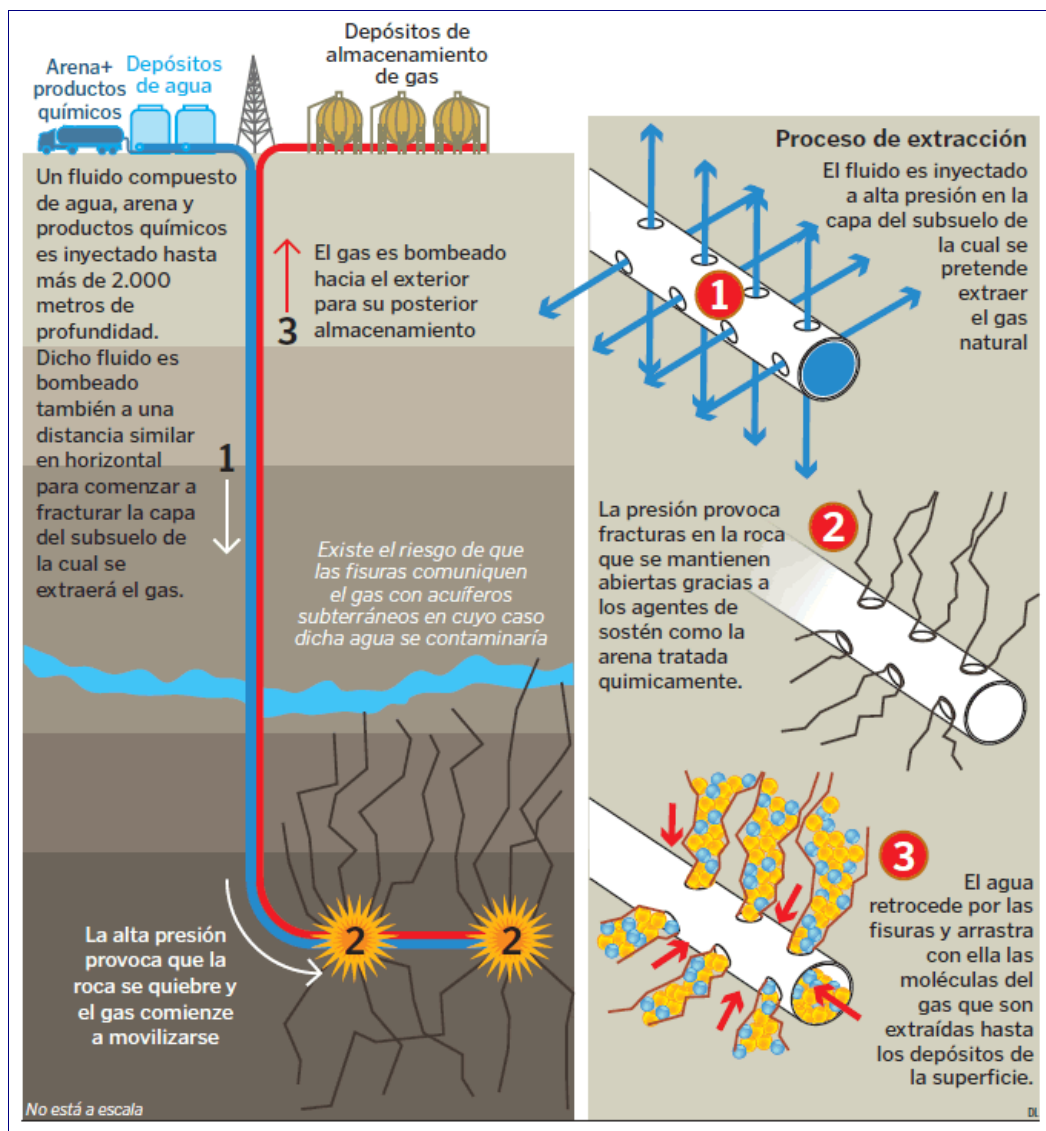


Figura 3.8: Fractura hidráulica. Fuente: Diario de León.

### 3.3.3 Tratamiento, transporte y almacenamiento.

El GN cuando es extraído del suelo contiene impurezas que son necesarias eliminar antes de ser comercializado. Algunos de los procesos para purificar el gas son: eliminación de aceites y otros condensados, reducción del contenido del agua para evitar la corrosión y deterioro de los gasoductos, eliminación de gases ácidos que deterioran los gasoductos y separación de los líquidos del gas natural. Todos estos procesos se llevan a cabo en plantas de procesamiento del gas, aunque algunos de ellos pueden realizarse también a la salida de los pozos o en plantas de extracción.



Una vez se ha tratado el GN, se transporta desde las zonas de producción hasta las zonas de consumo.

El sistema de transporte por tierra de gas consiste en una compleja red de gasoductos. Los gasoductos son tuberías de acero al carbono de alto límite elástico y con todas sus uniones soldadas, que son fijas y subterráneas estando enterradas en la superficie terrestre o en el fondo de los océanos. Al estar enterrados, los gasoductos es uno de los métodos de transporte y distribución de energía más seguros. Las pérdidas de GN derivadas del transporte son mínimas. Para hacer circular el gas natural a través de los gasoductos se modifican los niveles de presión.

Existen diferentes tipos de gasoductos dependiendo de la capacidad de gas que transporten y según la diferencia de presión entre sus extremos y su diámetro:

- Red de transporte: compuesta por gasoductos de alta presión. Transportan el gas desde las plantas de procesamiento hasta las zonas de alta demanda de gas, que suelen ser zonas urbanas muy pobladas. El gas natural por estos gasoductos viaja a muy alta presión, con presiones máximas de 72 y 80 bar, lo que reduce mucho el volumen del gas impulsándolo a lo largo del gasoducto.
- Red de distribución: Transportan el gas desde la red de transporte hasta los puntos finales de consumo. Este tipo de gasoductos están situados en las ciudades y pueblos más pequeños de manera que se pueda abastecer a todos los clientes de gas natural. En este caso, el gas natural viaja a baja presión suministrando dicho gas a una presión menor, de entre 0,05 y 4 bar.

El gas natural licuado se transporta a través de buques metaneros como el de la figura 3.9. Este método de transporte hace posible el aprovisionamiento de gas procedente de reservas muy alejadas y que tienen prácticamente una demanda local nula. [19]

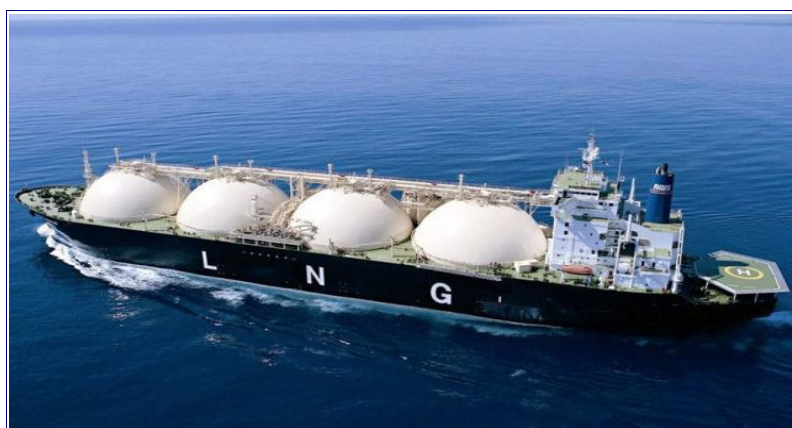


Figura 3.9: Buque metanero. Fuente: Calderas y gas natural.

Finalmente el gas natural es almacenado en enormes tanques a la espera de su transporte o utilización. Estos tanques permiten aislar el gas natural del frío, el calor y el ruido.

El gasoducto más importante de España es el del Magreb, que lleva el gas desde el yacimiento de Hassi R'mel (Argelia) hasta Cádiz. Enagás es actualmente la principal empresa transportista de gas natural. Las empresas distribuidoras compran el gas al transportista a un precio de transferencia regulado y lo venden también a precio regulado a los clientes. En la actualidad, la distribución del GN en España la lleva a cabo Gas Natural Fenosa, Endesa y Naturgas Energía Distribución.[19]

### 3.4 Aplicaciones y consumo

De acuerdo con la figura 3.10 un gran porcentaje de GN va destinado a la generación eléctrica. Con demanda convencional se hace referencia al consumo residencial, al sector servicios y al sector industria.

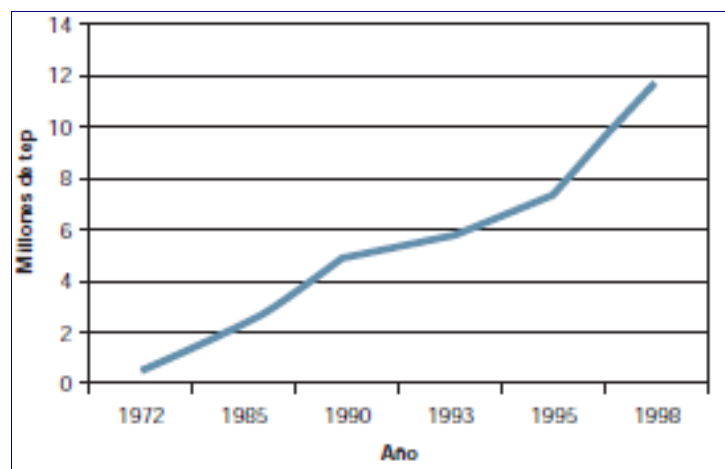
	GWh				Variación (%)			
	2008	2009	2010	2011	08 / 07	09 / 08	10 / 09	11 / 10
<b>Demanda Total</b>	<b>449.684</b>	<b>402.544</b>	<b>400.909</b>	<b>374.483</b>	<b>10,1%</b>	<b>-10,5%</b>	<b>-0,4%</b>	<b>-6,6%</b>
Demanda Convencional	261.663	241.437	265.720	264.571	-1,7%	-7,7%	10,1%	-0,4%
Demanda de Generación eléctrica	188.021	161.107	135.189	109.912	32,4%	-14,3%	-16,1%	-18,7%
% Demanda Convencional	58,0%	60,0%	66,3%	70,6%				
% Demanda Generación eléctrica	42,0%	40,0%	34,0%	29,4%				

Figura 3.10: Evolución de la demanda de GN en España. Fuente: CNE

A nivel doméstico, el gas natural se utiliza principalmente para la calefacción y para cocinar. Con el sector comercio se hace referencia al consumo doméstico de espacios colectivos como hospitales, escuelas u hoteles. El gas natural se puede usar en cualquier proceso de generación de calor o frío.

En la industria, el GN tiene un papel doble: Por un lado debido a su alto poder calorífico se ha convertido en la fuente principal de calor de sectores como el de la cerámica, el vidrio, la metalurgia, el textil o el del papel. Por otro lado es una materia primaria para la obtención de diversos productos como el metano, que constituye el producto base en la producción de hidrógeno, metanol, amoníaco o acetileno.

En los veinte últimos años, la utilización de gas natural creció un 87% en el mundo. Actualmente representa la cuarta parte del consumo energético mundial. En España desde el inicio de la gasificación del estado, a principios de los años 70, el consumo de gas natural no ha dejado de aumentar.



*Figura 3.11: Evolución del consumo de GN en España.  
Fuente: Gas Natural*

## 4 Herramientas matemáticas para analizar el uso de recursos limitados

A continuación se van a exponer la Teoría de Hotelling y el Principio del Máximo de Pontryagin. Ambas secciones van precedidas por la biografía sobre su creador.

### 4.1 Harold Hotelling

Harold Hotelling nació en Minnessota en 1895, fue un estadístico, matemático y economista . [20]



*Figura 4.1: Imagen de Harold Hotelling*

Su formación académica comienza en la Universidad de Washington estudiando periodismo, allí obtiene un máster en Matemáticas. En 1924 se doctoró en Matemáticas en Princeton. A partir de 1927 fue profesor en diversas universidades, publicó en revistas científicas hasta el día de su muerte en 1973.

Durante su estancia en la Universidad de Washington, dio un giro a su carrera al pasar de las matemáticas puras hacia la economía matemática motivado por el famoso

Eric Temple Bell. Desde ese momento su trabajo toma dos vertientes: la estadística matemática y la economía.

En el campo de la estadística podemos destacar la distribución de T cuadrado de Hotelling y su uso en el contraste de hipótesis estadístico y en las regiones de confianza así como una introducción al análisis de la correlación canónica.

Sus artículos de economía a lo largo de los años 1920 y 1930 abordaron la competencia, la teoría del juego, la depreciación y agotamiento de recursos.

En 1931, se publica "La Economía de los recursos agotables". En la que utiliza el cálculo de variaciones en el problema de agotamiento de recursos no renovables. [21]

Su apellido da nombre al Lema de Hotelling, la Ley de Hotelling en economía y a la Regla de Hotelling, que aparece detallada en el siguiente apartado.

Hotelling realizó estudios pioneros sobre la no convexidad en economía. La no convexidad se asocia con fallos de mercado, donde la oferta y demanda difieren o los equilibrios de mercado pueden ser ineficientes.

En un escenario de oligopolios y monopolios las no-convexidades cobran una mayor importancia. La preocupación de Hotelling sobre la acción de grandes productores explotando su poder de mercado y sus lecturas de Piero Sraffa, un reconocido economista, dieron origen a su obra del coste marginal en 1938. En la que demostraba que la eficiencia económica es alcanzada si todos y cada uno de los bienes son producidos y vendidos al precio que iguala al coste marginal. Esta afirmación es una de las bases de los teoremas Fundamentales de la Economía del Bienestar.

En 1972 fue homenajeado con el Premio de Carolina del Norte por sus contribuciones a la ciencia. [22]

#### 4.1.1 Regla de Hotelling

La Regla de Hotelling trata de ayudarnos a saber cuándo y cuánto debe explotarse un recurso limitado.

La sociedad en su conjunto tiene motivos para preservar gran parte de los recursos con el objetivo de satisfacer las demandas futuras. No obstante en una economía de mercado, el único motivo para mantener intactas las reservas de recursos no renovables es que el rendimiento financiero que se puede obtener de ellas en el futuro sea más alto que el que se puede obtener en la actualidad.

Los recursos que permanecen intactos no producen ningún ingreso mientras no se extraigan y se pongan a la venta.

Cuando un productor toma la decisión de no extraer es debido a que espera que en un futuro el precio aumente, si en ese momento hay muchos productores que piensan como él, en el momento que produzcan habría una oferta excesiva que provocaría una disminución del precio. Sin embargo en el momento actual el precio aumentará debido a la poca oferta existente, pero si son muchos los que producen puede haber una escasez futura que provoque el aumento de los precios. [24]

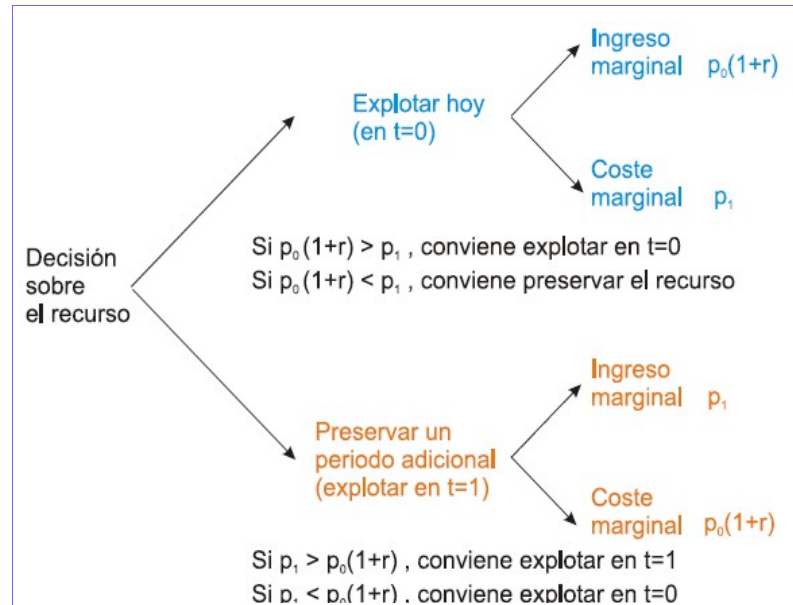


Figura 4.2: Regla de Hotelling. Fuente: Dto de economía, Uc3m

Entre los dos casos extremos, hay una situación intermedia y sostenible, extraer cada año una cantidad suficiente para que los precios de mineral crezcan al mismo ritmo que el tipo de interés de la economía. Esta es la idea fundamental de la regla de Hotelling. De esta idea podemos destacar que la cantidad de recurso que extraigamos irá disminuyendo con los años. [23]

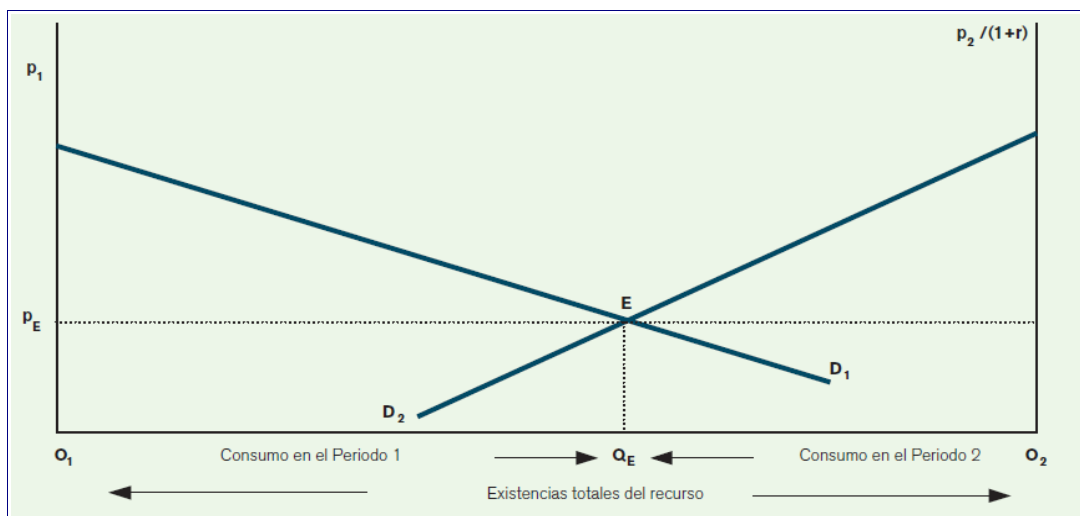


Figura 4.3: La competencia perfecta y la regla de Hotelling. Fuente: Informe sobre el comercio mundial 2010

El enunciado de un problema general a resolver con la regla de Hotelling debe tener las siguientes hipótesis de partida:

- Reservas conocidas en la actualidad.
- El precio es una función conocida en el tiempo.
- Los costes de extracción son nulos.

Como en todo modelo económico existen críticas al modelo de Hotelling tal y como se detallan a continuación.

El modelo de Hotelling parte de ciertas hipótesis que no se cumplen en la mayoría de los casos que queremos evaluar.

Siempre se desconoce la cantidad restante del recurso a explotar. Además este modelo supone que la cantidad extraída no influye en el precio, lo que no es cierto. Los costes de extracción tampoco son nulos y el precio no es una función conocida.

Además, no podemos ignorar la posibilidad de que en el futuro podamos prescindir de un recurso no renovable concreto debido a la existencia de tecnologías que permitan satisfacer las demandas de la sociedad de un modo más adecuado utilizando algún recurso alternativo.

La tecnología de reemplazo se puede representar a través de un precio, suficientemente alto, que haría cero la demanda del recurso en cuestión. Este precio, en términos prácticos, representa un umbral a partir del cual el depósito de mineral deja de tener valor para su propietario. Una vez que se active y se generalice la tecnología de reemplazo, dejarán de tener valor los recursos que no se hayan explotado.



## 4.2 Lev Semionovich Pontryagin

Lev Semionovich Pontryagin (3 septiembre 1908-3 mayo 1988) nació en Moscú en el seno de una familia de clase media y acudió a un colegio muy humilde. [26]



*Figura 4.4: Lev Semionovich Pontryagin*

Cuando Pontryagin tenía 14 años una explosión le dejó ciego. Este fue el detonante para que su madre, Tatyana Andreevna, una simple costurera, tomara las riendas de la educación de su hijo. No solo acudía a la escuela con él sino que al llegar a casa le leía libros de matemáticas y artículos científicos, así hasta concluir sus estudios en la Universidad de Moscú en 1925. Una vez acabada su formación académica ella seguía a su lado como secretaria. Además, Tatyana le hacía los manuscritos y le supervisaba los trabajos

En 1952 da un giro a su investigación en topología y empieza a estudiar los problemas de las matemáticas aplicadas, en particular, el estudio de las ecuaciones diferenciales y teoría de control. Este repentino cambio fue debido a su amistad con el físico Andronov. [27]

De esta etapa podemos destacar el Principio del Máximo de Pontryagin que se explicará en la siguiente sección. Clave en la teoría moderna de la optimización. [28]

En 1961 publicó “*La teoría matemática de los procesos óptimos*” con algunos de sus alumnos.

Pontryagin recibió muchas distinciones por su trabajo, pero quizá la más importante llegó en 1970 siendo elegido Vicepresidente de la Unión Matemática Internacional.

### 4.3 Principio del máximo de Pontryagin:

La teoría de control óptimo permite resolver problemas, donde la evolución de un sistema dinámico está modificado por las decisiones de un agente que fija el valor de un parámetro, llamado control con el fin de optimizar una función coste. ]

En cada tiempo  $t$  el agente escoge un control  $u$ . La ecuación diferencial que describe el sistema de control viene dada por:

$$\begin{aligned} \text{[Ec.1]} \quad \frac{dq}{dt} &= \dot{q}(t) = f(t, q, u), \\ \text{donde } f &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, q, u) \rightarrow f(t, q, u), \end{aligned}$$

$q$  es la posición y  $u$  es el control a escoger en cada tiempo  $t$ . En los problemas de control  $q$  es absolutamente continua, lo que implica que es diferenciable en casi todo punto, y el control  $u$  acotado y localmente integrable.

Fijada la condición inicial para  $q$ , para cada función de control la ecuación diferencial tiene una única solución que corresponde a una trayectoria del sistema dinámico. En los problemas de optimización de este trabajo se considerara que las trayectorias evolucionan a lo largo de un intervalo fijo por lo que el enunciado genérico del problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \min_{(u,q)} \int_0^T F[t, q, u] dt \\ & q(0) = q_0 \\ & \dot{q}(t) = f(t, q, u) \\ & \text{[ Problema 1]} \\ & \text{donde } F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Es la función de coste cuya integral se tiene que optimizar sobre todas las trayectorias solución de Ec1 que satisfaga la ecuación inicial.

Una técnica habitual para resolver el problema de control óptimo es la utilización del PMP, que nos da condiciones necesarias de optimización.

La ecuación diferencial dependiente de controles restringe las posibles posiciones.

Este arbitraje es tenido en cuenta asociando un precio a esta restricción y definiendo la función hamiltoniana es una función asociada al problema 1:

$$\begin{aligned} H(t, q, u, \lambda) &= f(t, q, u) + \lambda f(t, q, u) \\ &\text{donde } H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

El primer sumando del Hamiltoniano designa el efecto de la función coste y el segundo sumando del hamiltoniano expresa el aumento futuro del objetivo según la variación del vector de posición.

El hamiltoniano es entonces la suma del valor instantáneo del objetivo y de los valores futuros de este objetivo teniendo en cuenta la variación del vector de posición, ponderada por los multiplicadores asociados a esta variación.

Una vez aclarado el concepto del hamiltoniano el PMP nos resultará mas comprensible.

Teorema del Principio del Máximo de Pontryagin:

Si  $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^K$  es el control óptimo del Problema, entonces existen funciones absolutamente continuas  $\lambda^*: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que:

$$1) \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(t, q, u)$$

$$2) \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial F}{\partial q} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q}$$

Además el control maximiza el hamiltoniano sobre los controles para casi todo t:  
 $\max_{u \in U} H(t, q, u, \lambda) = H(t, q^*, u^*, \lambda^*)$

*NOTA 1: Habitualmente los controles toman valores en conjuntos compactos U de  $\mathbb{R}^k$*

Si  $u^*$  está en el interior del conjunto U, una condición necesaria para la optimización es:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Si el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, es decir,  $H(q, u, \lambda)$ , entonces el PMP también nos dice que el hamiltoniano es constante a lo largo de la trayectoria óptima. Si el intervalo de tiempo está por determinar, en lugar de ser  $[0, T]$ , entonces el hamiltoniano es cero a lo largo de la trayectoria óptima.

A continuación se resuelve un problema sencillo mediante el PMP:

**Siendo la función de coste cuadrática en los controles, se tiene que minimizar:**

$$\min_u \int u^2(t) dt \quad .$$

**Teniendo en cuenta que el coste toma los siguientes valores  $u \in [-1, 1]$**

Puesto que sabemos que la relación entre el ritmo de extracción,  $u$ , y la cantidad de recursos,  $q$ , destinados a la venta, es la siguiente:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = u \quad ,$$

Construyo la función hamiltoniana:

$$H(q, u, \lambda) = -u^2 + \lambda u$$

Las ecuaciones diferenciales asociadas al hamiltoniano son:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \Rightarrow \lambda = cte = \lambda_0.$$

Debemos considerar los valores de  $u$  en el hamiltoniano

$$H(q, u, \lambda) = -u^2 + \lambda u = \begin{cases} -1 + \lambda_0 & u=1 \\ \frac{\lambda^2}{4} & \text{si } u \in (-1, 1) \\ -1 - \lambda_0 & u=-1 \end{cases}$$

Para que el máximo del hamiltoniano se alcance para  $u=0$ ,

$$\text{si } u=1, \quad -1 + \lambda_0 < 0 \Rightarrow \lambda_0 < 0$$

$$\text{si } u=-1, \quad -1 - \lambda_0 < 0 \Rightarrow \lambda_0 > 0$$

Como el hamiltoniano es una función de  $u$  con las ramas hacia abajo, el máximo

se alcanza con el vértice, es decir:  $u = \frac{\lambda}{2}$  .

Vemos que cuando  $u=0$  toma el valor máximo, por lo que damos

como válido  $\lambda_0 = 0$  .

En este caso,  $u$  toma valores del interior del intervalo  $U$ , de acuerdo a la nota anterior una condición necesaria para el máximo del hamiltoniano será:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0 \Rightarrow u = \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_0}{2} \quad , \quad \text{si } u \in (-1, 1)$$

Como  $u$  toma valores entre  $-1$  y  $1$  tenemos

$$-2 < \lambda_0 < 2$$

$$\min_u \int_0^T \left( \frac{\lambda}{2} \right)^2 dt = \int_0^T \left( \frac{\lambda^2}{4} \right) dt = \frac{\lambda_0^2}{4} T = u^2 T$$

Si  $u \in (-1,1)$ , el funcional  $\int_0^T$  toma valores entre 0 y  $T$ .

Si  $u = \pm 1$ , el funcional vale  $T$ . Por lo tanto, el mínimo se alcanza cuando  $u=0$ . Luego  $\lambda_0 = 2u=0$

**Si el ritmo de extracción estuviera definido en este nuevo intervalo  $[1,2]$ , es decir, si  $u \in [1,2]$  ¿Cuál sería el control óptimo?**

*Se escoge el valor de  $u$  para que el valor del hamiltoniano sea máximo.*

$$H(q, u, \lambda) = -u^2 + \lambda u = \begin{cases} -4 + \lambda_0 & u=2 \\ -1 - \lambda_0 & u=1 \end{cases}$$

*El máximo se alcanza en  $u=1$ , si  $\lambda_0 \in (1,3)$ . Es fácil comprobar que el valor mínimo del funcional se obtiene para  $u=1$*

## **5 Aplicación del PMP a la extracción del Gas Natural**

En esta sección vamos a hallar la extracción óptima de un recurso limitado aplicando el Principio del Máximo de Pontryagin. Primero se hará sobre un caso teórico y luego con un caso real. Antes de exponer la resolución de estos problemas, se detallarán en la sección 5.1 y 5.2 los datos experimentales recopilados y su modelización con ayuda de Matlab.

### **5.1 Datos experimentales**

En esta sección se tratarán los datos experimentales que se han recogido de, las reservas, el precio, los costes y la demanda del gas natural.

Se comenzará haciendo una descripción de los datos extraídos. A continuación se estandarizarán las unidades y se concluirá con las tablas originales y las que se han elaborado a partir de esas.

En el caso del GN no voy a interpretar estos datos como el volumen de gas natural sino como la energía que se puede producir con todo el volumen del gas. La unidad que elijo es el teravatio-hora , TWh. La he escogido porque al ser una unidad muy grande los valores del volumen quedarán más pequeños y así facilito los cálculos con Matlab y su interpretación. La unidad monetaria con la que se expresa el precio y el coste son los millones de euro, puesto que es la moneda de España. Con respecto a la escala del tiempo para conseguir que Matlab modelice los datos con unos coeficientes más bajos empiezo mi escala en el año 0. Asigno el año 0 al año 1970, que es el año más antiguo del que tengo información. De tal forma que restando 1970 al año original consigo desplazar la escala de tiempo.

#### **5.1.1 Reservas mundiales de gas natural**

Para obtener los datos de las reservas mundiales se han usado las siguientes fuentes: Sedigas y EIA. Estos datos son aproximados puesto que cada vez se siguen descubriendo nuevos pozos, como hemos visto en la sección 3.2.1. Los datos de la reserva aparecen en las tablas 5.2 y 5.2. [31]

La tabla 5.2 es de la que extraigo la mayor parte de los datos. Las unidades del gas natural son en “trillion/ pie<sup>3</sup>”. Estas magnitudes son muy comunes en Estados Unidos. Es importante no confundir “trillion” con la palabra trillón. En este caso “trillion” hace referencia a los trillones estadounidenses que equivalen a lo que conocemos como un billón.  $1 \text{ billón} = 10^{12}$ . A partir de ahora en vez de usar la nomenclatura inglesa directamente pondré billón. La unidad de volumen que aparece en primer lugar es pie<sup>3</sup>

En el caso de la tabla 5.2 se necesitan las siguientes equivalencias:

$$1 \text{ pie}^3 = 0,02832 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ m}^3 \text{ gas natural} = 10,35 \text{ KWh} = 10,35 * 10^{-9} \text{ TWh}$$

De manera que el factor de conversión para la tabla 5.2:

$$\text{Billón pie}^3 * \frac{10^{12} \text{ pie}^3}{\text{billón pie}^3} * \frac{0,02832 \text{ m}^3}{\text{pie}^3} * \frac{10,35 * 10^{-9} \text{ TWh}}{1 \text{ m}^3} = 293.11 \text{ TWh}$$

En la tabla 5.3 las unidades son en billones de metros cúbicos. De manera que el factor de conversión será:

$$\text{Billón m}^3 * \frac{10^{12} \text{ m}^3}{\text{billón m}^3} * \frac{10,35 * 10^{-9} \text{ TWh}}{1 \text{ m}^3} = 10350 \text{ TWh}$$

Para finalizar desplazo la escala de tiempo.

Para algunos años tengo dos datos tal y como se ve en las siguientes tablas. Con ellos he hecho la media aritmética. Todo esto que reflejado en la tabla 5.4



Un ejemplo de datos diferentes para un mismo año:

Se tiene al año 2010 que corresponde al 40 en nuestro caso:

Tabla de la que extraigo el dato	Dato Original	Dato estandarizado TWh/m <sup>3</sup>
Tabla 5.2	6638,185 Billón pie <sup>3</sup>	1945718,4
Tabla 5.3	189,9 Billón m <sup>3</sup>	1965465

Tabla 5.1: Ejemplo de conversión de unidades

$$\frac{1945718,4 + 1965465}{2} = 195559,2$$

AÑO	Billón pie <sup>3</sup>	AÑO	Billón pie <sup>3</sup>
1980	2592,029	1997	4947,04
1981	2653,905	1998	5087,568
1982	2926,955	1999	5141,944
1983	3038,37	2000	5149,962
1984	3208,476	2001	5288,894
1985	3407,202	2002	5457,56
1986	3490,103	2003	5505,371
1987	3648,7	2004	6079,053
1988	3796,606	2005	6046,629
1989	3933,194	2006	6124,583
1990	3987,533	2007	6190,877
1991	4215,587	2008	6213,714
1992	4376,666	2009	6262,386
1993	4884,373	2010	6638,185
1994	5013,823	2011	6708,19
1995	4981,91	2012	6809,26
1996	4935,261	2013	6845,572

Tabla 5.2: Reservas mundiales probadas de gas natural. Fuente: EIA

<b>Año</b>	<b>Billones m³ GN</b>
1970	38,5
1975	63,1
1980	74,6
1985	96,3
1990	124,1
1995	147,1
2000	153,1
2005	175,1
2010	189,9
2011	195,3
2012	198,3
2013	199,9
2014	203,9

*Tabla 5.3: Reservas mundiales de gas natural.  
Fuente: Sedigas.*

Los datos de las tablas 5.2 y 5.3 los utilizaremos en la modelización tal y como tal y como aparecen en la tabla 5.4 donde ya se ha cambiado la escala de tiempo.

<b>Año</b>	<b>Reservas TWh</b>	<b>Año</b>	<b>Reservas TWh</b>
0	398475,000	27	1450026,894
5	653085,000	28	1491217,056
10	765929,810	29	1507155,206
11	777886,095	30	1547045,181
12	857919,780	31	1550227,720
13	890576,631	32	1599665,412
14	940436,400	33	1613679,294
15	997694,989	34	1781831,225
16	1022984,090	35	3584612,426
17	1069470,457	36	1795176,523
18	1112823,185	37	1814607,957
19	1152858,493	38	1821301,711
20	1226610,399	39	1835567,960
21	1235630,706	40	1955591,703
22	1282844,571	41	1993796,285
23	1431658,570	42	2024133,599
24	1469601,660	43	2037735,304
25	1491366,320	44	2110365,000
26	1446574,352		

*Tabla 5.4: Reservas mundiales de gas natural*

### 5.1.2 Precio del gas natural

Para hallar los precios que voy a usar he contado con los datos de las tablas 5.5 y tabla 5.6 que se han obtenido de Worldbank y IEA. La primera tabla hace referencia sólo a los precios de Europa, en la siguiente aunque aparecen varias regiones, sólo me centraré en los datos de Europa a partir del 2015, incluyendo este, para tener una previsión del futuro únicamente del escenario del gas natural. [30], [31]

Las dos tablas presentan las mismas unidades. Estas unidades son en dólares por MBTU. Los USD hacen referencia al dólar estadounidense. Los MBTU son un múltiplo de los BTU. Las siglas BTU equivalen a “unidad térmica británica” representan la cantidad de energía necesaria para elevar un grado Fahrenheit a la temperatura de una libra de agua en condiciones atmosféricas normales.

$$1\text{MBTU}=1000\text{ BTU}$$

Para uniformizar los datos he elegido las unidades Millón de €/TWh, de nuevo. En cuanto al año, vuelvo a ser consecuente con el apartado anterior y desplazo la escala de tiempo situando en 1970 el año 0

Para uniformizar las unidades de las tablas tenemos que definir un valor que relacione los euros con los dólares. He establecido  $1\text{€}=1,38\text{ USD}$  de manera constante para todo el estudio, despreciando las posibles fluctuaciones que puedan tener las monedas en el futuro o hayan tenido en el pasado. En cuanto a la energía 1MBTU de gas natural corresponde a 293.071 vatios-hora. A partir de ahí deduzco los siguiente valores de conversión las dos tablas:

$$1 \frac{\text{USD}}{\text{MBTU}} * \frac{1,38\text{€}}{\text{USD}} * \frac{\text{Millón€}}{10^6\text{€}} * \frac{1\text{MBTU}}{293,071\text{ Wh}} * \frac{10^{12}\text{ Wh}}{\text{TWh}} = 4708,75 \frac{\text{Millón€}}{\text{TWh}}$$

De este modo origino la tabla 5.7

Año	USD/MBTU
1990	2,099
1991	2,199
1992	2,049
1993	2,089
1994	1,939
1995	1,919
1996	1,879
1997	2,159
1998	0,629
1999	0,769
2000	2,369
2001	2,579
2002	2,159
2003	2,419
2004	2,579
2005	4,689
2006	5,629
2007	6,999
2008	11,599
2009	6,999
2010	6,599
2011	9,099
2012	10,299

*Tabla 5.5: Precio de GN en Europa. Fuente: Worldbank*

	GAS Scenario						New Policies Scenario WEO-2010				
	2009	2015	2020	2025	2030	2035	2015	2020	2025	2030	2035
United States	4.1	5.6	6.1	6.4	7.0	8.0	7.0	8.1	9.1	9.9	10.4
Europe	7.4	9.0	9.5	9.7	10.1	10.9	10.6	11.6	12.3	12.9	13.3
Japan	9.4	11.5	11.7	11.9	12.3	12.9	12.2	13.4	14.2	14.9	15.3

*Tabla 5.6: Precio (USD) de importaciones de gas natural(MBTU )2009. Fuente: IEA*

Año	Millón €/TWh	Año	Millón €/TWh
20	9883,875	36	26505,763
21	10354,750	37	32956,750
22	9648,438	35	22079,538
23	9836,788	36	26505,763
24	9130,475	37	32956,750
25	9036,300	38	54617,000
26	8847,950	39	32956,750
27	10166,400	40	31073,250
28	2962,013	41	42845,125
29	3621,238	42	48495,625
30	11155,238	45	34844,750
31	12144,075	50	42378,750
32	10166,400	55	44733,125
33	11390,675	60	45674,875
34	12144,075	65	47558,375
35	22079,538		

*Tabla 5.7: Precio de gas natural en Europa.*

### 5.1.3 Coste de extracción de gas natural.

Es muy complicado estimar unos costes de gas natural. Los costes dependen de donde se encuentre y los métodos de extracción que se utilicen (En la sección 3.3.2 detallo algunas técnicas). Además, muchas veces el mismo pozo de extracción de gas natural también se usa para sacar petróleo lo que conlleva unos costes compartidos.

Para ello se han extraído los datos de varias tablas de la web anteriormente citada, EIA. En estas tablas distingue entre costes de extracción y de exploración, que yo he sumado para hacer el coste total, para cada año.

Las tablas 5.8 y 5.9 nos dan información sobre los costes de exploración y los costes de extracción respectivamente .

En la tabla 5.8 nos muestra los costes de exploración del gas natural en

África y Europa. También incluye otra columna con los datos en el extranjero. Al

igual que en la tabla anterior voy a despreciar los datos de Estados Unidos. En el caso de Europa y África no aparecen datos hasta el intervalo (1989-1991) por lo que para los años anteriores tomaré los valores de la columna del extranjero. Para el resto de los años haré una media ponderada. Puesto que la mayoría de los países a los cuales España compra más gas natural son de África, voy a obtener mis datos con una meda dando un peso del 80% a los datos de África y el 20% a los Europeos.

La tabla 5.9 nos informa de los costes de extracción en Estados Unidos y en el extranjero. Considerando extranjero como el resto de los países. Estos últimos son los que interesan puesto que la importación de gas natural de Estados Unidos en España es despreciable.

La unidades del coste de ambas tablas son USD/ Barril. Los barriles son una unidad de capacidad. En en este caso el informe del que extraje los datos aclaraba que eran barriles de gas natural e indicaba su equivalencia con pies cúbicos:

$$1 \text{ barril} = 5,618 \text{ pie}^3$$

Los costes de gas natural los expresaré en millones de €/TWh, al igual que el precio. La conversión entre unidades de volumen y energía será:

$$1 \text{ m}^3 \text{ gas natural} = 10,35 \text{ KWh} = 10,35 * 10^{-9} \text{ TWh}$$

En cuanto a los dólares seguiré conservando el mismo factor de conversión que en el precio. El factor de conversión global que voy a utilizar es el siguiente:

$$1 \frac{\text{USD}}{\text{barril}} * \frac{1,35 \text{ €}}{1 \text{ USD}} * \frac{\text{Millón}}{10^6} * \frac{\text{barril}}{5,618 \text{ pie}^3} * \frac{\text{pie}^3}{0,02832 \text{ m}^3} * \frac{1 \text{ m}^3}{10,35 * 10^{-9} \text{ TWh}} * = 607,2739$$

La tabla 5.8 muestra el año en un intervalo por lo que para trabajar con esta información voy a hacer la media de esos dos valores y el dato central será el año que asigne a cada intervalo. Como he hecho en los otros apartados a este dato le voy restar 1970 para ser consecuente con mi escala del tiempo.

Una vez que he estandarizado todas las unidades sumo los costes pertenecientes a

los mismos años. Para los años en los que solo tenga un tipo de valor doy el valor más cercano a ese año de la otra tabla. Concluyo restando el valor de 1970. Los datos resultantes los presento en la tabla 6.10

Intervalo anual	Estados Unidos	África	Europa
1981-1983	27,252094147402		
1982-1984	24,277939229482		
1983-1985	22,531094239975		
1984-1986	19,377969773756		
1985-1987	16,525209236605		
1986-1988	12,662420446416		
1987-1989	11,010621485088		
1989-1991	10,402490672334	6,8222085586	9,8
1990-1992	9,998444823822	6,7878255478	10,3266025893
1991-1993	8,235143365209	6,5399121642	10,5015498894
1992-1994	6,124881905340	4,9337655779	7,3349028494
1993-1995	5,635018392728	4,089696835	6,4651131079
1994-1996	6,855526946883	4,4605899371	5,9042754558
1995-1997	8,373327898081	5,6036273716	7,2351578104
1996-1998	11,454764656596	4,875998618	9,7135678195
1997-1999	12,238359321885	4,7517455084	9,7891988628
1998-2000	12,602899229081	3,5113517877	9,396992348
1999-2001	8,622429129838	4,5341305443	6,7977988246
2000-2002	9,192154106703	4,2029697929	11,2719287326
2001-2003	12,186072147565	6,8479826816	11,7111630464
2002-2004	32,889806815721	8,7577751802	14,1645271667
2003-2005	53,405481069817	17,2120383814	10,908925976
2004-2006	75,349447031981	27,2587024151	24,209606501
2005-2007	54,494765567829	39,0736030635	32,2543142664
2006-2008	63,804551483280	32,376413519	61,1468614112
2007-2009	40,969634171129	34,5490626382	41,7544767315

Tabla 5.8: Costes de exploración de gas natural en USD/Barril. Fuente:EIA

<b>Año</b>	<b>Estados Unidos</b>	<b>Extranjero</b>
1981	6,44	6,96
1982	7,55	6,24
1983	8,03	6,14
1984	7,97	6,02
1985	8,67	6,21
1986	7,29	5,20
1987	6,82	5,49
1988	6,71	5,80
1989	6,86	5,77
1990	6,96	6,48
1991	6,92	6,76
1992	5,72	6,17
1993	5,51	5,18
1994	5,05	4,98
1995	4,67	4,70
1996	4,51	4,52
1997	4,48	4,35
1998	4,35	4,31
1999	4,40	3,82
2000	3,78	3,88
2001	4,27	4,17
2002	4,25	4,24
2003	4,39	4,62
2004	4,96	4,82
2005	5,91	5,38
2006	7,29	5,58
2007	8,62	6,68
2008	9,85	7,51
2009	8,50	8,03

*Tabla 5.9: Costes de extracción  
USD/Barril Fuente: EIA*



<b>Año</b>	<b>Millón €/TWh</b>	<b>Año</b>	<b>Millón €/TWh</b>
11	11861,2664	26	6345,0608
12	11418,2926	27	6193,0898
13	11696,0557	28	6113,0083
14	10004,9875	29	5167,1296
15	10626,3886	30	5387,4595
16	8347,4520	31	5942,3088
17	8070,1703	32	7326,7506
18	8084,0817	33	8779,3532
19	8657,5403	34	12613,7065
20	8443,7127	35	19451,5756
21	8657,5403	36	26289,3183
22	8202,2966	37	27209,3371
23	6433,8562	38	26418,3775
24	5794,2133	39	26732,9568
25	5738,4888		

*Tabla 5.10: Suma de costes de exploración y extracción*

#### 5.1.4 Demanda del gas natural

Para hallar los datos de la demanda he contado con los datos de las tablas 5.11 y 5.12 y la figura 5.1. La primera tabla hace referencia a la demanda de GN desde 1972 hasta 1998, la otra tabla expone los datos desde 2001 a 2011. En la figura 5.1 se pueden ver los datos de la demanda desde 2001 a 2010 que coinciden con los de la tabla 5.2 y una previsión del futuro de la demanda de GN realizado por dos fuentes diferentes: La Comisión Nacional de la Energía (CNC) y Enagás. De esta última figura sólo se usará el valor medio de las dos previsiones.

En cuanto a las unidades en la tabla 5.2 y la figura 5.1 aparecen en teravatio-hora, por lo que no se le aplica ningún factor de conversión.

La tabla 5.11 muestra los datos en tep. Los tep como se ha explicado en la sección 3.2 son unidades de energía. Un millón de tep son 11,63 kilovatios-hora. Por lo que multiplicando por 11,63 los valores del GN de la tabla 5.1 se obtienen los TWh. Como se ha explicado al principio también cambiamos la escala de tiempo. La tabla 5.13 recoge todos estos cambios.

Año	Millones tep
1972	0,4
1977	1,1
1982	1,9
1987	2,4
1992	5,6
1997	11,5
1998	11,9

Tabla 5.12: Evolución histórica del consumo de GN es España.

Fuente: Gas Natural.

Año	TWh
2001	211,807
2002	243,038
2003	275,239
2004	319,6
2005	375,894
2006	391,6
2007	408,298
2008	449,684
2009	402,544
2010	400,909
2011	374,483

Tabla 5.11: Evolución de la Demanda de GN nacional. Fuente: CNE

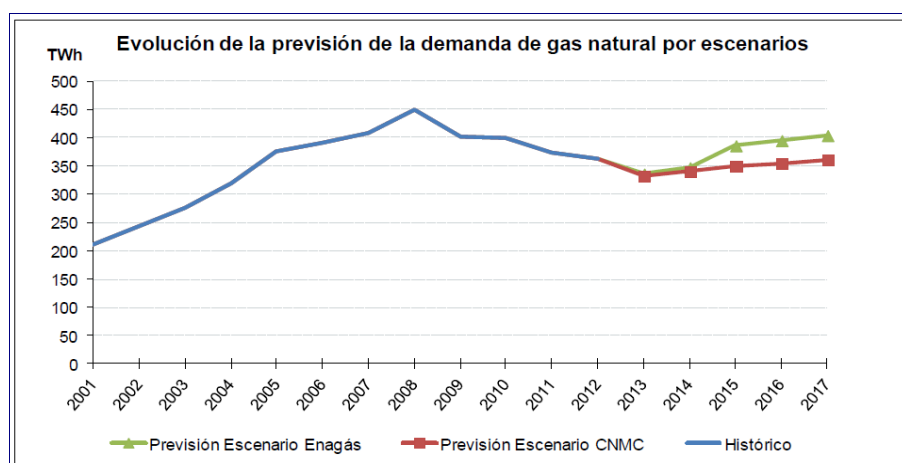


Figura 5.1: Evolución de la previsión. Fuente: CNMC

Año	TWh	Año	TWh
2,00	4,65	36,00	391,60
7,00	12,79	37,00	408,30
12,00	22,10	38,00	449,68
17,00	27,91	39,00	402,54
22,00	65,13	40,00	400,91
27,00	133,75	41,00	374,48
28,00	138,40	42,00	360,00
31,00	211,81	43,00	335,00
32,00	243,04	44,00	360,00
33,00	275,24	45,00	375,00
34,00	319,60	46,00	380,00
35,00	375,89	47,00	385,00

*Tabla 5.13: Evolución de la demanda de GN es España*

## 5.2 Modelizado de los datos experimentales

En esta sección se pretende aproximar con funciones polinómicas los datos anteriores.

El objetivo de la aproximación es doble. Por un lado se evalúan en las funciones resultantes años para los que no tenemos datos del precio, las reservas, la demanda y el coste. Por otro lado se pretende modelizar una serie de datos, que se expondrán mas adelante, en el intervalo del año 40 al 55, que será el período en el que se centrará nuestro estudio. Estas funciones resultantes son las que vamos a emplear para aplicar el PMP y estimar el ritmo de extracción óptimo que maximice el beneficio.

Para ello se usará Matlab, concretamente la versión 7.9.0. Una vez introducidos los datos en Matlab uso la herramienta Curve fitting Tool. Estas herramientas quedan descritas en el Anexo que incluyo sobre Matlab.

En esta sección se mostrará un gráfico, para cada uno de los ajustes y la función polinómica perteneciente a ese ajuste. Los datos procedentes de evaluar el año en el polinomio resultante aparecen en la tabla 5.14 en rojo.

- Reservas mundiales de gas natural en función del tiempo.

En la gráfica queda claro que todos los datos siguen una trayectoria lineal por lo que directamente se ha aproximado a una función polinómica de grado 1. El dato de las reservas de gas es enorme en comparación con los valores de los años. Esto queda reflejado en el tipo de escala que utiliza el programa para representar los datos. Con  $r$  se hace referencia a las reservas y con  $t$  al tiempo. El polinomio que calcula el programa es el siguiente:  $r = 3,75 \cdot 10^4 t + 4,354 \cdot 10^5$ .

En la figura 5.2 se observan los datos de la reserva junto al ajuste en rojo.

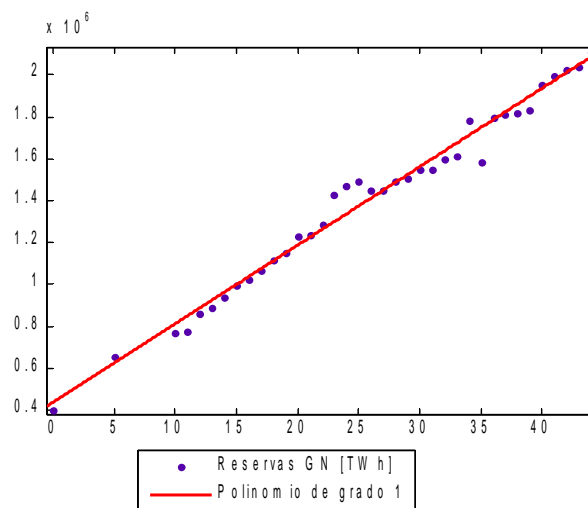


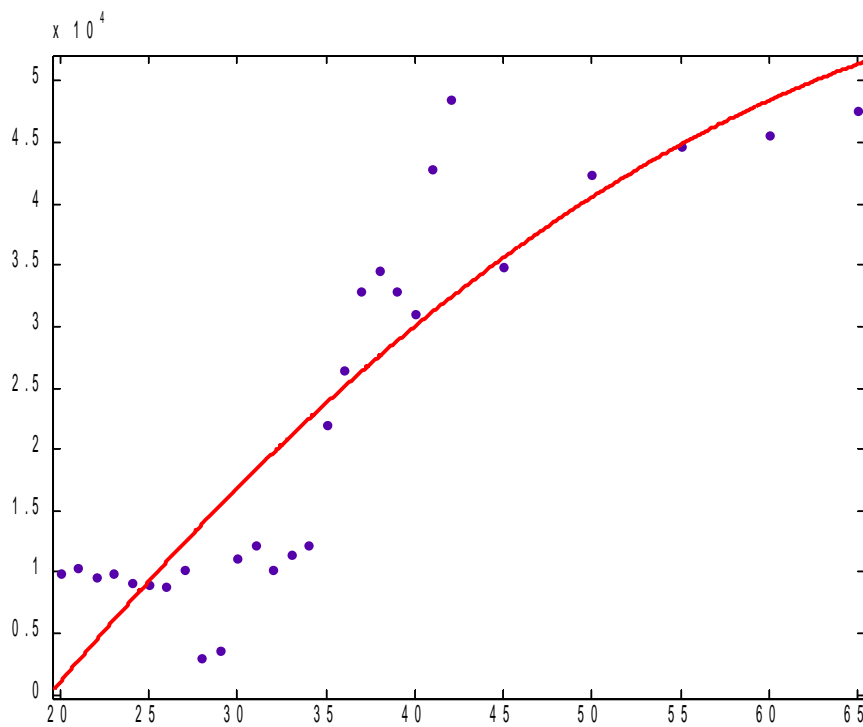
Figura 5.2: Reservas en función del tiempo

Una vez que tenemos la función que modela las reservas se evalúan los años que no tienen datos sobre las reservas. Así se obtiene una aproximación a las reservas correspondientes. Estos datos son los que aparecen en la tabla 5.14 en color rojo como hemos comentado antes.

- Precio en función del año

Se modelan los datos como el siguiente polinomio de grado 2. En el que el precio se representará se referirá como  $p$ .

$$p = -13,18 * t^2 + 2240 * t,852 * 10^4$$



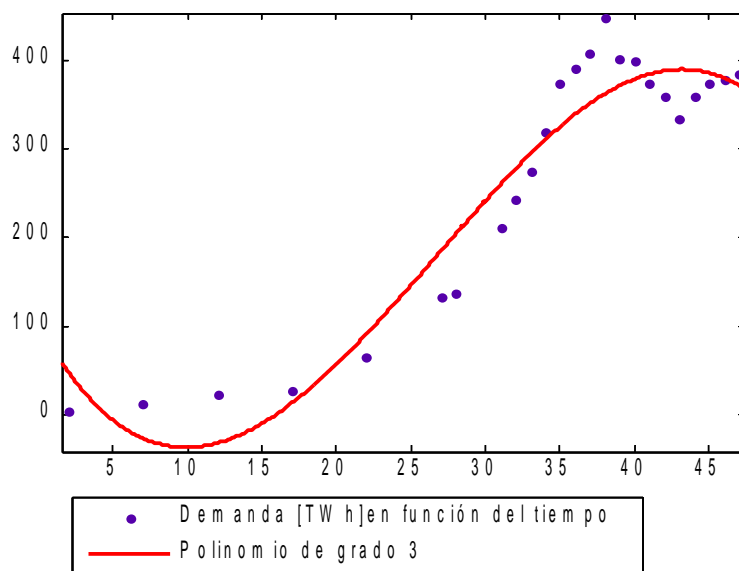
*Figura 5.3: Precio [Millón €/TWh] en función del año*

- Coste en función del año

En el caso del coste como los datos a partir del año 36 se mantienen estables se asume que del año 39 en adelante el precio se mantiene constante.

- Demanda en función del año.

A continuación se hace lo mismo que para las reservas con la demanda. La letra  $d$  hace referencia a la demanda y como se ha explicado antes la  $t$  se refiere al tiempo. El polinomio es el siguiente:  $d = -0,023 t^3 + 1,85 * t^2 - 29,95 * t + 100,5$



*Figura 5.4 Demanda en función del tiempo*

Se evalúa el polinomio con los años del intervalo 20 a 30 de los que no se disponía información para tener algún dato aunque sea aproximado. En cuanto a los datos relativos al año 50 en adelante se han supuesto la demanda constante.

A continuación la tabla 5.14 con todos los datos experimentales y los procedentes de evaluar los años en los polinomios;

Año	Reservas [TWh]	Precio [Millon €/TWh]	Demanda [TWh]	Coste [Millon €/TWh]
0	398475,000			
2	510400,000		4,65	
5	653085,000			
7	697900,000		12,79	
10	765929,810			
11	777886,095			11861,266
12	857919,780		22,1	11418,293
13	890576,631			11696,056
14	940436,400			10004,987
15	997694,989			10626,389
16	1022984,090			8347,452
17	1069470,457		27,91	8070,170
18	1112823,185			8084,082
19	1152858,493			8657,540
20	1226610,399	9883,875	56,5	8443,713
21	1235630,706	10354,750	73,2	8657,540
22	1282844,571	9648,438	65,130	8202,297
23	1431658,570	9836,788	108,840	6433,856
24	1469601,660	9130,475	127,459	5794,213
25	1491366,320	9036,300	146,438	5738,489
26	1446574,352	8847,950	165,637	6345,061
27	1450026,894	10166,400	133,750	6193,090
28	1491217,056	2962,013	138,400	6113,008
29	1507155,206	3621,238	165,637	5167,130
30	1547045,181	11155,238	184,919	5387,459
31	1550227,720	12144,075	211,810	5942,309
32	1599665,412	10166,400	243,040	7326,751
33	1613679,294	11390,675	275,24	8779,353
34	1781831,225	12144,075	319,60	12613,707
35	1584612,426	22079,538	375,89	19451,576
36	1795176,523	26505,763	391,60	26289,318
37	1814607,957	32956,750	408,30	27209,337
38	1821301,711	34617,000	449,68	26418,378
39	1835567,960	32956,750	402,54	26732,957
40	1955591,703	31073,250	400,91	26732,957
41	1993796,285	42845,125	374,48	26732,957
42	2024133,599	38495,625	360,00	26732,957
43	2037735,30	33430,180	335,00	26732,957
44	2110365,00	34523,520	360,00	26732,957
45	2122900,00	34844,750	375,00	26732,957
46	2160400,00	36631,120	380,00	26732,957
47	2197900,00	37645,380	385,00	26732,957
50	2310400,00	42378,750	385	26732,957
55	2497900,00	44733,125	385	26732,957
60	2685400,00	45674,875	385	26732,957

Tabla 5.14: Datos experimentales y evaluados en el polinomio

Como se ha explicado antes, la otra parte del trabajo se centrará en los años del 40 al 55, los que muestra la tabla 5.15. Además incluyo otra columna a la que llamo  $z$ . Con  $z$  me refiero al cociente entre la reserva de cada año y la reserva final, del año 55. Haciendo esto asumo que durante ese intervalo la reserva de Gas Natural tiene un valor constante en 2497900 TWh, que será lo máximo que se pueda extraer.

año	reserva	precio	demanda	coste	$z$
40	1955591,703	31073,250	400,91	26732,957	0,7828943123
41	1993796,285	42845,125	374,48	26732,957	0,7981889929
42	2024133,599	38495,625	360,00	26732,957	0,8103341204
43	2037735,30	33430,180	335,00	26732,957	0,8157793765
44	2110365,00	34523,520	360,00	26732,957	0,8448556788
45	2122900,00	34844,750	375,00	26732,957	0,8498738941
46	2160400,00	36631,120	380,00	26732,957	0,8648865047
47	2197900,00	37645,380	385,00	26732,957	0,8798991153
50	2310400,00	42378,750	385	26732,957	0,924936947
55	2497900,00	44733,125	385	26732,957	1

Tabla 5.15: Datos del año 44 al 55

Para aplicar el PMP necesito los polinomios que representen:

- Precio en función de  $z$

La figura 5.5, muestra la gráfica roja que representa el ajuste del precio.

$$P(z) = 1.853 * 10^5 * z^2 - 2.85 * 10^5 * z + 1.454 * 10^5$$

- Coste en función de  $z$

Se asume como una recta constante tal y como se puede observar en la figura 5.5.

$$C = 2.673 * 10^4$$



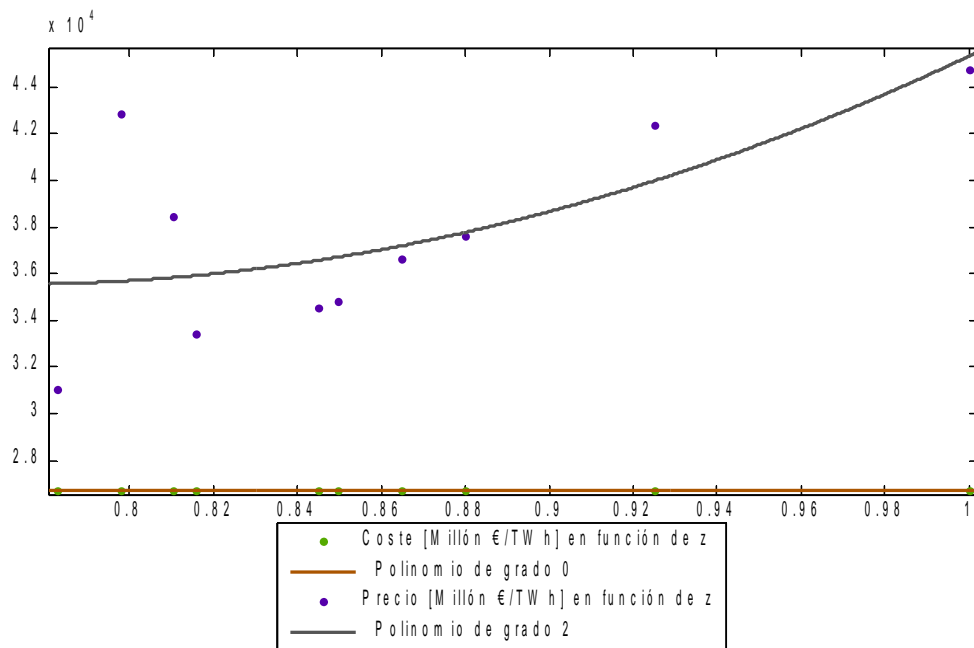


Figura 5.5: Coste y precio en función de  $z$

- Demanda en función de  $z$

$$Q(z) = 756.9 \cdot z^2 + 756.9 \cdot z + 901.3$$

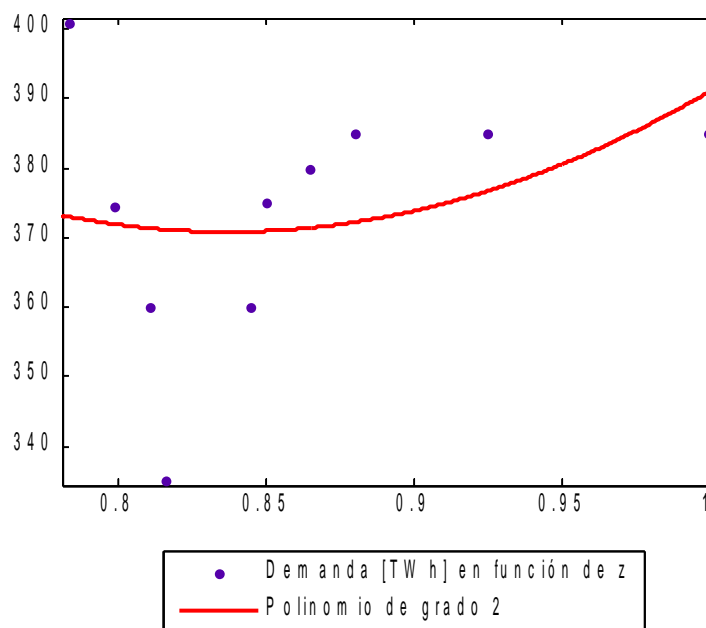


Figura 5.6: Demanda en función de  $z$

### 5.3 Resolución del caso teórico

El problema que vamos a resolver consiste en hallar el ritmo de extracción óptimo de un recurso no renovable para maximizar el beneficio. Para resolverlo utilizaremos el PMP.

El ritmo de extracción  $u$ , se define como la derivada de la cantidad extraída,  $q$ , en función del tiempo:

$$\frac{dq}{dt} = u$$

El precio de cada unidad extraída,  $p$ , se tomará en función de  $q$  y de  $u$ . La relación de  $q$  con el ritmo de extracción es proporcional. Cuanto mayor sea la cantidad extraída, el precio será mayor. El coste de cada unidad extraída,  $c$ , es una función de  $q$ , cuanto mayor sea la cantidad de recurso a extraer mayor será  $c$  para cada unidad extraída.

$$\begin{aligned} p(q, u) &= qu \\ c(q) &= q \end{aligned}$$

El beneficio de cada unidad extraída es la diferencia entre  $p$  y  $c$ . Si al beneficio de cada unidad extraída se le multiplica por el ritmo de extracción resultará el beneficio por cada unidad de tiempo. De acuerdo con un escenario de libre competencia, para evaluar el beneficio en función del tiempo, se debe tener en cuenta un interés. Este interés que llamaremos  $i$  refleja el deterioro del dinero con el tiempo. Un beneficio actual,  $B_0$ , será igual que un beneficio  $B_0 * e^{-it}$  al cabo de un tiempo  $t$ . Teniendo en cuenta todas estas consideraciones el beneficio por cada unidad de tiempo será:

$$B = (p(u, q) - c(q)) * e^{-it}$$

En este caso queremos evaluar beneficio en un intervalo de tiempo comprendido entre  $t_0$  y  $t_f$ . Por lo que:

$$\max_u \int_{t_f}^{t_0} (p(u, q) - c(q)) u(t) e^{(-it)} dt$$

Sustituyendo las expresiones de p y q:

$$\max_u \int_{t_f}^{t_0} (qu - q) u(t) e^{(-it)} dt$$

Como se ha explicado al principio de la sección lo que nos interesa es obtener el ritmo de extracción, u. Para ello aplicamos el PMP

A continuación defino el hamiltoniano Pontryagin asociado al problema de control óptimo y las ecuaciones asociadas al hamiltoniano llamadas ecuaciones hamiltonianas:

$$\begin{aligned} H &= u \lambda + (qu - q) u(t) e^{(-it)} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = (u - 1) u e^{(-it)} \end{aligned}$$

El siguiente paso es buscar la expresión de u para la que el hamiltoniano tome un valor mínimo. El hamiltoniano en función de u, tomando el resto de las variables como constantes, tiene forma de parábola. La expresión que se busca es la correspondiente al vértice. Una vez que se realiza la derivada parcial del hamiltoniano con respecto a u, se iguala a 0 la expresión resultante y se despeja la u:

$$u = \frac{-\lambda - q * e^{(-it)}}{2q e^{-rt}}$$

La u puede estar definida entre unos valores máximo y mínimos que acoten el ritmo de extracción. Para este caso simplemente se va a suponer valores de u mayores o iguales a 0. Puesto que la q, que es la extracción tiene carácter acumulativo se deduce que el ritmo de extracción nunca podrá tomar valores negativos.

$$0 \geq \frac{-\lambda - q * e^{(-it)}}{2q e^{-rt}}$$

De este modo podemos deducir que:  $\lambda \geq 0$

Una vez que se han planteado todas las ecuaciones sólo queda resolver el sistema formado por dos ecuaciones hamiltonianas y la ecuación que define  $u$  óptima. Para eso necesitamos los valores de  $\lambda$  y  $q$  para un  $t$  determinado. Se ha supuesto que la cantidad de extracción en el momento inicial es equivalente a una unidad. La evolución de las gráficas siempre será con respecto a la cantidad extraída en el momento actual. El parámetro  $\lambda$  es 0.

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= 0 \\ q(0) &= 1 \\ u &= \frac{-\lambda - q * e^{(-it)}}{2q e^{-it}} = \frac{-\lambda}{2q} e^{it} + 0,5 \\ \dot{q} &= u \\ \dot{\lambda} &= (u - 1) u e^{(-it)} \end{aligned}$$

Mediante matlab con la función ODE 45, que está explicada en el anexo que incluyo resolvemos el sistema bajo diferentes escenarios. La línea azul es la  $q$  y la verde los valores de  $\lambda$ . La  $q$  representa la cantidad extraída de GN normalizada para con el valor de  $q$  correspondiente el año 0 y tiene un carácter acumulativo.

A) Intervalo de tiempo comprendido en 10 años sin interés.

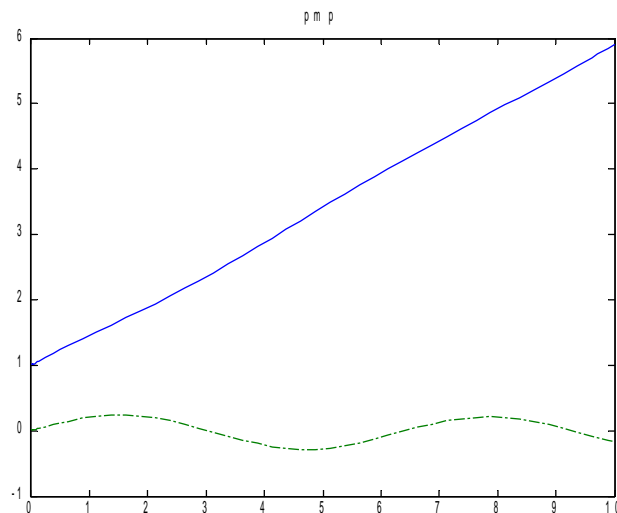


Figura 5.7 Cantidad extraída en función de los años, sin interés.

B) Intervalo de tiempo comprendido en 10 años con un interés del 1%.

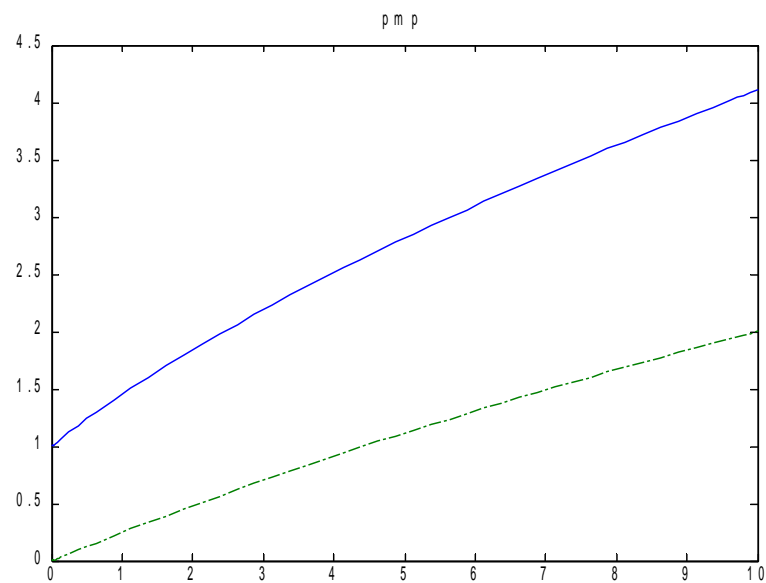


Figura 5.8 Cantidad extraída en función de los años, con interés.

C) Intervalo de tiempo comprendido en 100 años sin interés

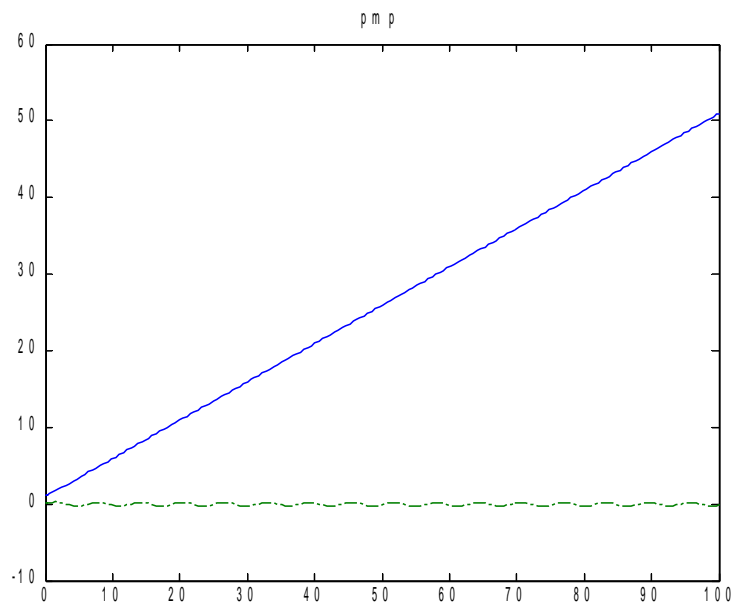
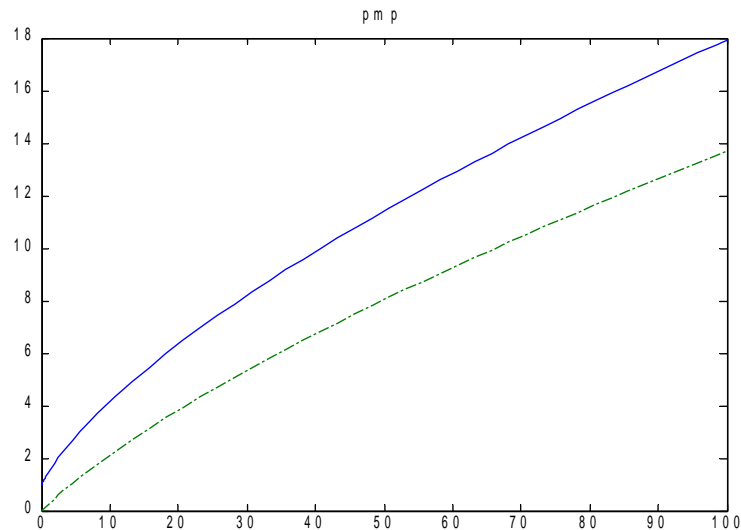


Figura 5.9 Cantidad extraída en función de los años, sin interés.

D) Intervalo de tiempo comprendido en 100 años con interés del 1 %.



*Figura 5.10 Cantidad extraída en función de los años, sin interés.*

De acuerdo a como hemos definido al principio de la sección, el ritmo de extracción, es la variación de  $q$ . Vemos que en las figuras en las que no se tiene en cuenta el interés presentan un ritmo de extracción constante. Cuando entra en juego el interés la cantidad extraída poco a poco va disminuyendo y con ella el ritmo de extracción. Esto se aprecia más en la figura 5.10, que abarca 100 años, que en la figura 5.8.

## 5.4 Resolución del caso experimental.

El objetivo de esta sección es estimar la extracción de gas natural en el intervalo que abarca desde el año 40 al 55 para maximizar los beneficios. Para comenzar se describe el problema de optimización asociado a la extracción del gas natural que vamos a emplear y finalmente se sustituirán las expresiones de  $P(z)$ ,  $Q(z)$  y  $C$  calculadas en la sección 5.2.

La variable  $r(t)$  designa las reservas del recurso no renovable y  $u(t)$  la tasa de extracción de ese recurso que corresponde al control. La relación entre esas dos variables nos da la ecuación de control.

$$[\text{Ec } 2] \quad \frac{dr}{dt} = -u \quad .$$

También podemos establecer la siguiente relación entre el stock,  $r$ , y la cantidad de recurso extraído,  $q$  :  $r(t)=R-q(t)$ ,

Normalizamos las variables anteriores a tanto por uno utilizando  $R$

$$z(t) = \frac{r(t)}{R}, \quad w(t) = \frac{u(t)}{R}.$$

La ecuación diferencial [Ec 2] en estas nuevas variables se escribe:

$$\dot{z}(t) = -w(t)$$

El objetivo del problema es hallar la extracción óptima del recurso limitado para obtener un beneficio máximo.

La nueva función precio la voy a definir en función de la demanda y del ritmo de extracción de la siguiente manera:

$$p(z, w) = P(z) \frac{Q(z) - w}{Q(z)} = P(z) \left(1 - \frac{w}{Q(z)}\right)$$

La función beneficio, la diferencia entre el precio menos el coste,  $C$ , por el ritmo de extracción durante el periodo de tiempo,  $T$ , finalizado este periodo, el stock sería inexistente, por lo que la extracción no sería posible y el precio sería nulo. Además incluimos un interés,  $i$ , para que quede reflejado la devaluación del dinero:

$$\int_0^T (p(z(t), w(t)) - C) w(t) e^{-it} dt$$

Sustituyendo el precio en la ecuación anterior y recolocando los términos:

$$\text{donde:} \quad \alpha_0(z) = P(z) - C \quad \alpha_1(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$\int_0^T (\alpha_0(z(t)) - \alpha_1(z(t)) w(t)) w(t) e^{-it} dt$$

A continuación construimos la función hamiltoniana:

$$H(t, w, z, \lambda) = -\lambda w + (\alpha_0(z) - \alpha_1(z)w)w e^{-it}$$

El PMP establece que si  $(w^*, z^*)$  es la solución óptima debe existir  $\lambda^*$

que satisfaga las siguientes condiciones:

$$1) \quad \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -w \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}$$

$$2) \quad w^*(t, z^*, \lambda^*) = \arg \max [H(t, w, z^*, \lambda^*)], \text{ donde } w \in u.$$

La función hamiltoniana que se origina para este caso tiene forma de parábola invertida, para obtener la función  $w$ , del control óptimo hacemos la derivada parcial del hamiltoniano respecto  $w$ . Igualamos a 0 y despejamos la  $w$ :

$$\frac{\partial H}{\partial w} = -\lambda + \alpha_0(z)e^{-it} - 2\alpha_1(z)e^{-it}w = 0 \rightarrow w = \frac{\alpha_0(z(t)) - \lambda(t)e^{it}}{2\alpha_1(z(t))}.$$

Para poder estudiar el caso real bajo este marco teórico tenemos que suponer que las reservas totales,  $R$ , en el intervalo de tiempo desde 2010 al año 2025 se mantienen de manera constante. Este dato,  $R$ , será el correspondiente a las reservas probadas para el año 2025.

La función que representa las reservas en función de tiempo para este intervalo, la normalizamos entre la reserva máxima,  $R$ , de este modo obtengo  $z(t)$ . Esta función la uso para relacionar el precio el coste y la cantidad en función de  $z(t)$ . Dando origen a las últimas fórmulas de la sección 5.2.

$$P(z) = 756.9 * z^2 + 756.9 * z + 901.3$$

$$Q(z) = 756.9 * z^2 + 756.9 * z + 901.3$$

Sustituyendo:



$$\begin{aligned} \text{dónde: } \alpha_0(z) &= P(z) - c(z) = 1.853 \cdot 10^5 \cdot z^2 - 2.854 \cdot 10^5 \cdot z + 118670 \\ \alpha_1(z) &= \frac{P(z)}{Q(z)} = 244.8 \cdot z^2 + 224.94 \cdot z + 1.6088 \end{aligned}$$

Se asume un interés del 0.02

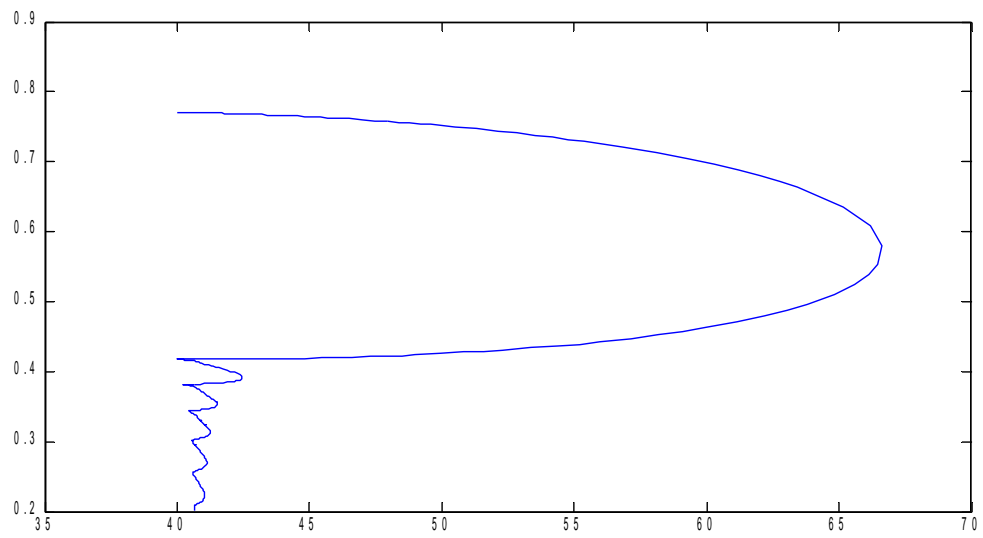
El sistema a resolver es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = -w \\ \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} \\ w = \frac{\alpha_0(z(t)) - \lambda(t)e^{it}}{2\alpha_1(z(t))} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z(40) = 0.78 \\ \lambda(55) = 0 \end{array}$$

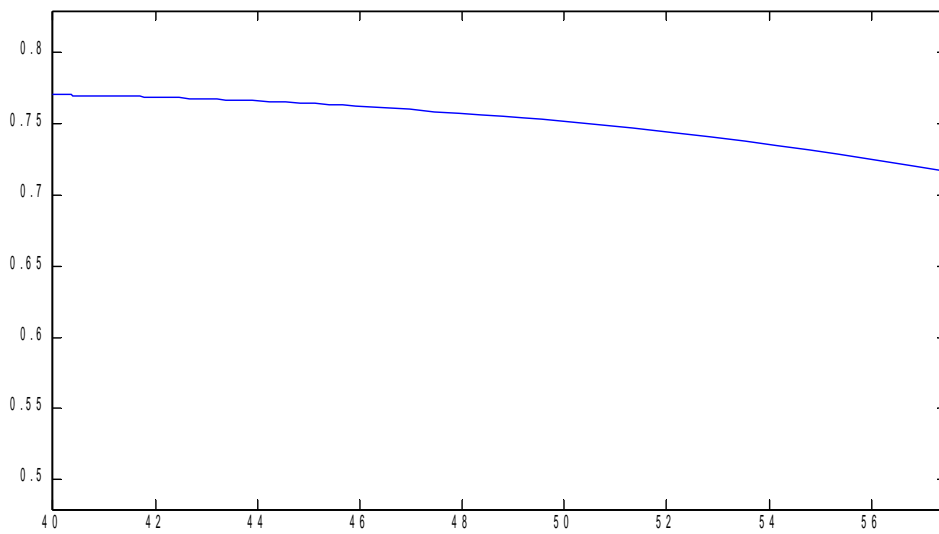
Las condiciones iniciales de la reserva normalizada corresponden a las del año 2010, para nuestro estudio año 40. Se establece que lambda sea 0 al final del intervalo y así se obtiene la otra condición de contorno. Este sistema se resolverá con la función bvp4c. Aparece más detallada en el anexo que incluyo con matlab.

Las gráficas 5.11 y 5.12 son las calculadas por matlab. En el eje X muestra las reservas normalizadas, z, y en el eje y los años.

Para el eje y tenemos dos valores, solo nos interesa la parte de arriba donde va disminuyendo. Esa disminución representa el agotamiento de las reservas. En el eje de las y nos indica la cantidad de recurso que queda, el stock, bajo las condiciones que suponemos, poco a poco el stock va siendo menor, hasta que cuando llegue a 0 se agote para ese intervalo. También se observa que el ritmo de extracción debe ser mayor a medida que aumenta el tiempo a pesar de que las reservas también disminuyan.



*Figura 5.11:  $z$  en función de los años*



*Figura 5.12:  $z$  en función de los años*

## 6 Conclusiones

Como se ha comentado en la introducción las conclusiones en este proyecto cobran una gran importancia.

En la sección 5.4 tratamos de estudiar la extracción del gas natural bajo el PMP. Para poder aplicar el PMP es necesario asumir ciertas hipótesis que no son reales. Además se ignoran factores que de manera indirecta afectan al gas natural. Estas hipótesis y factores se detallan a continuación:

En el estudio se supone que las reservas probadas para el intervalo de tiempo seleccionado son constantes. En realidad toman un ritmo creciente con el tiempo, además continuamente se están descubriendo nuevas reservas por lo que aunque tenga datos de reservas del futuro no puedo otorgar gran fiabilidad.

El estudio está basado en una situación ficticia, se analiza la demanda de España pero los datos de la reserva son a nivel mundial. Se ha decidido hacer así porque España no cuenta con unas reservas de gas exclusivas para cubrir su demanda.

En cuanto a los costes sólo se han tenido en cuenta los costes de extracción y exploración. Se han ignorando todos los costes derivados de la cadena de suministro que se han visto en la sección 3.3. Tampoco podemos olvidar la posibilidad de que se descubra una tecnología que abarate todos estos costes para el futuro.

En la figura 5. 12 vemos como al aumentar la extracción las reservas van disminuyendo. En la realidad las reservas probadas año tras año aumentan a pesar de que el consumo también se incrementa. Esta contradicción se debe a las hipótesis anteriormente nombradas. Basándonos en esto último, si nos ceñimos estrictamente a la definición económica de recuso limitado:

*“Recuso que existe en una cantidad inferior a la cantidad que se puede llegar a necesitar”.*

Inevitablemente nos tenemos que plantear hasta qué punto se puede considerar el gas natural un recurso limitado.

Algunos factores que debemos tener en cuenta son:

El contexto en el que se encuentran los países que nos venden gas. Por ejemplo si atraviesan guerras ó su situación política. Un ejemplo es el reciente conflicto entre Rusia y Ucrania. Ucrania debe pagar una deuda por gas natural a Rusia, ante esto, la respuesta de Rusia ha sido cortar el suministro de gas natural. Una solución es que el suministro de gas natural de un país no esté en manos únicamente de un sólo país.

En el sistema eléctrico español el gas natural tiene una gran importancia en la generación de electricidad de base, que muestra un gran apoyo a las renovables. El único inconveniente que presenta España con respecto al gas natural es la dependencia que tiene en otros países. A pesar de que en España no hay apenas yacimientos de gas natural sí que hay de gas no convencional, como el gas pizarra.

El gas pizarra es empleado como sustituto del gas natural, su extracción a pesar de ser muy barata, causa muchos problemas medioambientales. Uno de estos problemas es la contaminación de las aguas subterráneas que son el suministro principal de agua potable en el mundo. Lo que abre otro debate de si compensa o no explotar este recurso.

A nivel personal este proyecto me ha aportado muchas cosas. Por un lado conocimientos sobre el gas natural, sobre el control óptimo y sobre Matlab. Por otro lado para mí ha sido la primera vez que me enfrentaba a un trabajo de tal envergadura. He aprendido a redactar una memoria o hacer una bibliografía. A partir de ahora cuando vea un artículo científico lo miraré con mucho más criterio y valoraré mucho más todo el trabajo que hay detrás.

No puedo acabar sin mencionar a Lev Pontryagin. Para mí Pontryagin es un

ejemplo de superación. A pesar de su minusvalía, la ceguera, llegó a ser un gran matemático. Queda demostrado que las limitaciones que creemos que tenemos sólo existen en nuestra mente.

## **7 Bibliografía**

- [1] Usaola, Julio. *Mercados eléctricos* [material didáctico]. Febrero 2013.
- [2] Endesa. *Transporte y distribución* [material web]. 2014. Disponible en: [http://www.endesa.com/es/conoceendesa/lineasnegocio/Electricidad/Transporte\\_distribucion](http://www.endesa.com/es/conoceendesa/lineasnegocio/Electricidad/Transporte_distribucion)
- [3] Red Eléctrica de España, (REE). *El sistema eléctrico español. Avance del informe 2013*. Diciembre del 2013. Disponible en: [http://www.ree.es/sites/default/files/downloadable/avance\\_informe\\_sistema\\_electrico\\_2013.pdf](http://www.ree.es/sites/default/files/downloadable/avance_informe_sistema_electrico_2013.pdf).
- [4] Unesa. *Funcionamiento de las centrales eléctricas* [material web]. 2014. Disponible en: <http://www.unesa.es/sector-electrico/funcionamiento-de-las-centrales-electricas>
- [5] Comisión Nacional de la Energía, (CNE). *Información básica de los sectores de la energía*. 2012.
- [6] Comisión Nacional de la Energía, (CNE). *Informe marco sobre la demanda de energía eléctrica y gas natural, y su cobertura en el año 2012*. Abril 2013.
- [7] Eco *¿Realmente es tan barata la energía nuclear?* [material web]. Disponible en: <http://www.ecooo.es/177/ecooo-noticias/-Realmente-es-tan-barata-la-energ%C3%ADa-nuclear-/>
- [8] Foronuclear. *Central hidroeléctrica* [material web]. Disponible en: <http://www.foronuclear.org/es/tags/central-hidroel%C3%A9ctrica>

- [9] Gas Natural. *El gas natural. El recorrido por la energía* [edición para la comunidad de Madrid]. 2002
- [10] Innergy. *Historia del gas natural* [material web]. Disponible en:  
<http://www.innergy.cl/historiagas.htm>
- [11] Unión Fenosa. *Gas natural reservas y recursos. El gas natural y su futuro*. Marzo 2013
- [12] Iberdrola. *Precios regulados y unidades de gas*. Enero 2013
- [13] Energía Ivace. *Conversión de unidades energéticas* [material web].  
Disponible en :  
[http://energia.ivace.es/attachments/020\\_tabla\\_conversion\\_unidades\\_energeticas.pdf](http://energia.ivace.es/attachments/020_tabla_conversion_unidades_energeticas.pdf)
- [14] Repsol. *Hidrocarburos no convencionales* [material web]. Disponible en:  
[https://www.repsol.com/imagenes/es\\_es/no\\_convencionales\\_597x540\\_06\\_esp\\_tcm7-607176.swf](https://www.repsol.com/imagenes/es_es/no_convencionales_597x540_06_esp_tcm7-607176.swf)
- [15] Sánchez Moya, Yolanda. *Gas no convencional y Fractura hidráulica* [material web]. Disponible en  
<http://www.upyd.es/contenidos/ficheros/90227>
- [16] Enagás. *Medida de la energía en la industria del gas natural. Introducción y generalidades* [material web]. Disponible en:  
[http://www.e-medida.es/documentos/Numero-2/medida\\_de\\_la\\_energia\\_en\\_la\\_industria\\_del\\_gas\\_natural\\_introduccion\\_y\\_generalidades#2](http://www.e-medida.es/documentos/Numero-2/medida_de_la_energia_en_la_industria_del_gas_natural_introduccion_y_generalidades#2)
- [17] Comisión Nacional de los Mercados y la competencia, (CNMC). *Informe marco sobre la demanda de energía eléctrica y gas natural, y su cobertura. Horizonte 2013-2017* [material web]. Marzo 2014.

- [18] Diario de león.[Noticia sobre fractura hidráulica, material web] Abril 2013 [http://www.diariodeleon.es/noticias/afondo/leon-queda-fuera-mapa-fracking-renunciar-trofagas-investigacion\\_791757.html](http://www.diariodeleon.es/noticias/afondo/leon-queda-fuera-mapa-fracking-renunciar-trofagas-investigacion_791757.html)
- [19] Calderas y gas natural. *Gas natural* [material web]. Disponible en: <http://calderasygasnatural.com/gas-natural/>
- [20] Wikipedia. *Harold Hotelling* [material web]. Disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/Harold\\_Hotelling](http://es.wikipedia.org/wiki/Harold_Hotelling)
- [21] Hotelling, Harold. *La economía de los recurso limitados. 1931*
- [22] Centro de Artigo. *Harold Hotelling, Estadística, Ciencias económicas, Obras* [material web]. Disponible en: [http://centrodeartigo.com/articulos-noticias-consejos/article\\_134188.html](http://centrodeartigo.com/articulos-noticias-consejos/article_134188.html)
- [23] *Informe sobre el comercio mundial 2010* [Sólo se ha consultado la sección: C. La teoría del comercio y los recursos naturales]. Disponible dicha sección en: [http://www.wto.org/spanish/res\\_s/booksp\\_s/anrep\\_s/wtr10-2c\\_s.pdf](http://www.wto.org/spanish/res_s/booksp_s/anrep_s/wtr10-2c_s.pdf)
- [24] Departamento de economía de la universidad Carlos III Madrid (Uc3m). *Economía de los Recursos Naturales* [material didáctico]. 2008.
- [25] Medellín, Julio. *La gestión económica de los recursos naturales*. Diciembre 1998.
- [26] Wikipedia. *Lev Semenovich Pontryagin* [Material web]. Disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/Lev\\_Semenovich\\_Pontryagin](http://es.wikipedia.org/wiki/Lev_Semenovich_Pontryagin)
- [27] Venegas Martínez, Francisco. *Riesgos financieros y económicos. 2006*.
- [28] L. Pontryagin, V.G. *Teoría matemática de procesos óptimos*. 1986
- [29] Bardey, David y Bonnet, Hélène. *Teoría del control óptimo: ¡Una guía*



*para principiantes!* Enero 2006 .

- [30] Worldbank. *Precios del gas natural* [material web]
- [31] Agencia Internacional de Energía, IEA. [material web]. Disponible en:  
<http://www.eia.gov/naturalgas/data.cfm>
- [32] Agencia Internacional de Energía, IEA. *¿Nos hemos enterado de la edad de oro del gas?* 2011

## ANEXO MATLAB

A continuación se expondrán las principales funciones que se han utilizado para poder plantear y solucionar los problemas presentes en las secciones 5.3 y 5.4.

### **Curve fitting tool**

Esta herramienta nos permite introducirle datos experimentales para que nos los modelice con la función que deseemos, en nuestro caso polinomios de diferente grado.

Pulsando en start, situado abajo a la izquierda de la ventana principal de Matlab, luego en toolboxes y finalmente en curvefittig. aparece curve fitting tool.

La ventana principal de curve fitting tool tiene un gráfico. Encima del gráfico varios botones en Data se eligen los datos que queremos asignar a la variable “x” y a la “y” y en fitting seleccionamos el ajuste que queremos hacer.

Todos estos cambios aparecerán reflejados en la gráfica de la ventana principal.

### **Función Ode 45**

Ode45 es la función mas importante que dispone Matlab para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales. Antes de aplicar esta función tenemos que crear una matriz que representará el sistema de ecuaciones diferenciales.

Cada función del sistema de ecuaciones da origen a una columna de la matriz, las columnas se separan por punto y coma. Cada variable se representará como X(1), X(2), X(3)... en vez de X, Y, Z... ó en nuestro caso q y  $\lambda$ . También podemos introducir algún parámetro.

Una vez que tenemos hecha la matriz con la función Ode45, la resolvemos. Su sintaxis general es la siguiente:

$$[t,X]=ode45(odefun,tspan,X0,options)$$

- [t,X]: Con t se designa el tiempo y con X se hace referencia a la matriz donde cada columna indica una variable independiente.

- `tspan`: el intervalo de tiempo, `tspan=[ti,tf]`, tiempo inicial y final.
- `Odefun`: Se refiere al nombre de la función, o el sistema.
- `XO`: Es el vector que contiene los valores iniciales de las variables.

A continuación un ejemplo sencillo:

$$fg = \begin{cases} f: & \frac{dx}{dt} = -ax \\ g: & \frac{dy}{dt} = -8x - 9y \end{cases}$$

[Ejemplo 1]

*condiciones iniciales:*

$$x(0) = 4$$

$$y(0) = 1$$

$$tf = 12$$

$$a = 3$$

Primero se crea la matriz:

`fg` es su nombre, `(t,x)` el tiempo y `x` representa al conjunto de variables. Lo que en el enunciado aparece como `x` para nosotros será `x(1)` y la `y` la tomaremos como `x(2)`. Entre corchetes se escribe el contenido de las dos funciones separadas por punto-coma. Es importante acabar poniendo punto y coma.

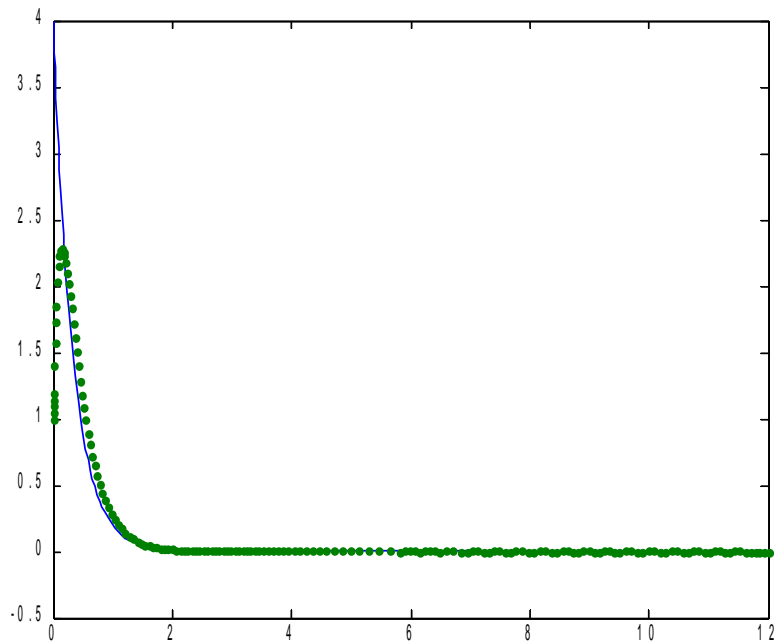
$$Fg = @(t,x) [-a*x(1); 8*x(1)-9*x(2)];$$

Se definen los parámetros y los valores iniciales de tal forma que una vez que lo ejecutemos el programa nos pida que introduzcamos el valor del tiempo final, el de `a` y el de las condiciones iniciales.

```
a=input(' parámetro a : ');  
  
x0=zeros(1,2);  
x0(1)=input(' valor inicial de x : ');  
x0(2)=input(' valor inicial de y : ');  
tf=input(' tiempo final , tf : ');  
  
tspan=[0 tf];  
fg=@(t,x)[-a*x(1); 8*x(1)-9*x(2)];  
[t,x]=ode45(fg,tspan,x0);  
  
plot(t,x(:,1),'- ',t,x(:,2),' . ');
```

Para ello a cada parámetro, en este caso solo a, se le iguala a input y entre paréntesis y apostrofe el valor con el que se quiere que el programa me solicite el valor de a. Para el caso de los valores iniciales de la matriz x tenemos que empezar escribiendo XO=zeros (1,2); dónde con el 1 y 2 indicamos el intervalo de valores a introducir. En las siguientes líneas escribimos x0 (1) para referirnos a la condición inicial de la variable x igualamos a input y entre paréntesis y apostrofe se escriben las palabras con las que queremos que nos solicite el programa los datos, lo mismo para la condición inicial de 2 y el tiempo final. Tspan como se ha explicado antes designa el intervalo de tiempo, que abarca desde t inicial, 0, hasta el tiempo final. Al final de cada línea se escribe punto coma. Para finalizar se escribe plot, para que aparezca una gráfica, y entre paréntesis primero la variable que quiero asignar al eje X, en este caso el tiempo y la variable que quiero asignar al eje Y, que para nuestro ejemplo es la x y la y la x aparecerá representada con guiones y la y con puntos, como vemos en el dibujo. Para conseguir esto entre apostrofes precedido de una coma se escribe el signo con el que se representa.

Una vez que se ejecute e introduzcamos las condiciones iniciales, la variable y el tiempo final de acuerdo al enunciado del problema aparecerá una gráfica como la siguiente:



*Figura 1: Figura correspondiente al ejemplo 1*

Esta función se ha usado para resolver el caso teórico. El código que he utilizado para resolver el problema del caso teórico:

```
f=@(T,X) [(-(X(2)*exp(i*T))/(2*X(1)))+0.5;(0.25-((X(2)^2*exp(2*i*T))/(4*X(1)^2)))*exp(-i*T)];  
i=input('Interés: ');  
X0=zeros(1,2);  
X0(1)=input('valor inicial de q: ');  
X0(2)=input('valor inicial de lambda: ');  
tf=input('valor del tiempo final: ');  
tspan=[0 tf];  
[T,X]=ode45(f,tspan,X0);  
plot(T,X(:,1),'-',T,X(:,2),'-.');  
title('pmp')
```

### Función **bvp4c**

Bvp4c se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales en los que, a diferencia del caso anterior, no sabemos las condiciones iniciales, pero sí las condiciones de contorno. Antes de aplicar esta función, al igual que con Ode 45, tenemos que crear una matriz que representará el sistema de ecuaciones diferenciales.

Una vez que tenemos hecha la matriz con la función bvp4c la resolvemos. Sus argumentos principales son:

```
sol=bvp4c(@Nombrefuncion, @BCFuncion,solinit)
```

- Nombrefuncion: Nombre que le damos al sistema de ecuaciones o funciones a resolver.
- BCFuncion: Contiene las condiciones de contorno y requiere de la función res.  
functionres=bcfuncion(ya, yb)

```
res=[ya(1)-p1 0.7828;yb(1)-p2];
```

p1 y p2 son los parámetros que deben aparecer. En este caso p1 equivale al valor que nos dará y(1) cuando se evalúe en a y p2 cuando ese mismo vector se evalúe en b .

- Solinit: La variable solinit es una estructura obtenida por la función bvpinit

```
solinit=bvpinit(linspace,[q1, q2]);
```

```
x=linspace(a,b);
```

Dónde q1 y q2 son condiciones aleatorias que se suponen para realizar el problema y a y b hace referencia a los valores finales e iniciales de x.

Código empleado para resolver el caso experimental:

```
function dydx=sisreal(x,y)

    dydx=[(-1.853*10^5*y(1)^2+2.854*10^5*y(1)-118270+y(2)*exp(0.02*x))/
(489.6*y(1)^2+449.88*y(1)+3.217);((-370600*y(1)+2.854*10^5+((1.853*10^5 *y(1)^2 -2.854*10^5
*y(1)+118270+y(2)*exp(0.02*x)))/
(489.6*y(1)^2+449.88*y(1)+3.217))*(489.6*y(1)+224.94)))*((1.853*10^5*y(1)^2-2.854*10^5
*y(1)+118270+y(2)*exp(0.02*x))/(489.6*y(1)^2+449.88*y(1)+3.217))*1/exp(x*0.02)];

end

function res=condreal(ya,yb)

res=[ya(1)-0.7828;yb(1)];

End

solinit=bvpinit(linspace(40,55,5),[0.8,0.4]);

exmpsol=bvp4c(@sisreal,@condreal,solinit);

x=linspace(40,55);

y=deval(exmpsol,x);

plot(x,y(1,:))
```